

Mathématiques pour économistes

Licence 1 Réussir

2025/2026 : Semestre 2

Yannick VINCENT

Faculté d'économie de Montpellier

www.yannickvincent.fr

Table des matières

1 Fonctions bijectives et réciproques	3
2 Continuité	8
I Définitions	8
II Théorème des valeurs intermédiaires	9
II.1 TVI, version 1	9
II.2 TVI, version 2	9
II.3 TVI, version 3	9
III Théorème des bornes atteintes	10
III.1 Théorème des bornes atteintes, version 1	11
III.2 Théorème des bornes atteintes, version 2	11
3 Dérivabilité	13
I Dérivée et élasticité	13
II Dérivation des fonctions réciproques	15
III Accroissements finis	16
III.1 Thorème de Rolle	16
III.2 Théorème des accroissement finis	16
III.3 Inégalité des accroissements finis	17
IV Formules de Taylor	17
IV.1 Développements à l'ordre 1	18
IV.2 Développements de Taylor à l'ordre n	19
4 Calcul intégral	23
I Primitives	23
II Intégrales : Définition et premières propriétés	24
III Intégration par parties	26
IV Changement de variables	27
V Primitives de fractions rationnelles	28

Chapitre 1

Fonctions bijectives et réciproques

Définition 1.1 – Fonction bijective

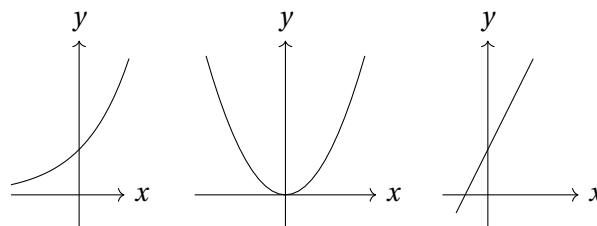
Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On dit que f est bijective si chaque élément de F a exactement un antécédent par f .

Remarque. Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on dit aussi que f est une bijection, ou encore qu'elle réalise une bijection de E vers F .

Question 1. Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est bijective ou non.

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - 1 \end{cases}$

Solution : La seule fonction bijective parmi les trois est f_3 . Cela est clair en considérant par exemple les courbes représentatives des trois fonctions.



Non bijective

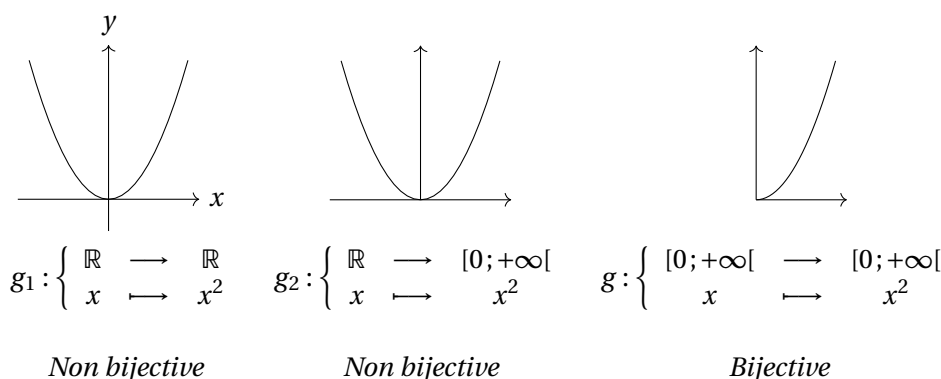
Non bijective

Bijective

Question 2. Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est bijective ou non.

1. $g_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$
2. $g_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$
3. $g_3 : \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$

Solution : La seule fonction bijective parmi les trois est g_3 .



Théorème 1.2

Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est bijective si, et seulement si, il existe une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$\text{pour tout } x \in E, \quad g \circ f(x) = x \text{ et pour tout } y \in F, \quad f \circ g(y) = y.$$

De plus, la fonction g est unique. On l'appelle la bijection réciproque de f , et on la note f^{-1} .

Démonstration. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Supposons que f est bijective. On définit l'application $g : F \longrightarrow E$ de la façon suivante :
 Pour tout $y \in F$, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f .
 g est bien défini car cet antécédent appartient à E .
 Montrons maintenant que, pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = x$.
 Soit $x \in E$,
 $g \circ f(x) = g(f(x))$.
 Or, x est un antécédent de $f(x)$ par f (c'est le seul car f est bijective) donc, par définition de g , on a $g \circ f(x) = x$.
 De même, montrons que, pour tout $y \in F$, $f \circ g(y) = y$.
 Soit $y \in F$,
 $f \circ g(y) = f(g(y))$.
 Or, par définition de y , $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f . Son image par f est donc y et on a bien $f \circ g(y) = y$.

- Réciproquement, supposons qu'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = x$ et pour tout $y \in F$, $f \circ g(y) = y$.
 Montrons que f est alors bijective.
 Comme pour tout $y \in F$, $f(g(y)) = y$, on voit que tout $y \in F$ admet $g(y)$ comme antécédent. Montrons qu'il s'agit en fait du seul.
 Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in F$ admettant deux antécédents par f notés x_1 et x_2 , avec $x_1 \neq x_2$.
 On a, d'une part, $g(y) = g(f(x_1)) = x_1$ et, d'autre part, $g(y) = g(f(x_2)) = x_2$. On en déduit ainsi que $x_1 = x_2$, ce qui est absurde. Il en résulte au final que tout $y \in F$ admet un unique antécédent par f , ce qui signifie exactement que f est bijective.
- Montrons enfin que l'application g est unique. Supposons qu'il existe deux applications g_1 et g_2 qui conviennent.
 Supposons par l'absurde que $g_1 \neq g_2$.
 Il existe $y \in F$ tel que $g_1(y) \neq g_2(y)$.
 Par conséquent, $f(g_1(y)) \neq f(g_2(y))$ car f est bijective (deux éléments différents ne peuvent

pas avoir la même image par f).
Cela implique que $y \neq y$, ce qui est absurde.

□

Les deux exemples suivants sont fondamentaux et sont à avoir « en tête » lorsque l'on parle de fonctions réciproques.

Exemple 1. La fonction f suivante est bijective.

$$f : \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

De plus, sa fonction réciproque est :

$$f^{-1} : \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$$

On a, en effet :

$$\text{Pour tout } x \in [0; +\infty[, \quad f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{x^2} = x,$$

$$\text{Pour tout } y \in [0; +\infty[, \quad f \circ f^{-1}(y) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

Exemple 2. La fonction f suivante est bijective.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0; +\infty[\\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$$

De plus, sa fonction réciproque est :

$$f^{-1} : \begin{cases}]0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{cases}$$

On a, en effet :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f^{-1} \circ f(x) = \ln(e^x) = x,$$

$$\text{Pour tout } y \in]0; +\infty[, \quad f \circ f^{-1}(y) = e^{\ln(y)} = y.$$

Méthode – Montrer qu'une fonction est bijective et déterminer sa réciproque

On résout $y = f(x)$ afin de montrer que cette équation admet une unique solution quel que soit $y \in F$. On obtient une équivalence de la forme $y = f(x) \iff x = g(y)$. La réciproque de f est alors g .

Exercice type. Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - 1 \end{cases}$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) & \iff y = 2x - 1 \\ & \iff y + 1 = 2x \\ & \iff x = \frac{y + 1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, f est bijective et sa réciproque est la fonction $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{y + 1}{2} \end{cases}$.

Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$.

Proposition 1.3 – Représentation graphique

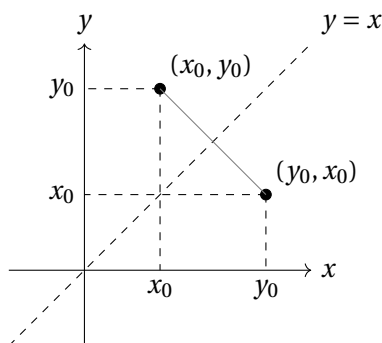
Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective. Alors la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Démonstration. On utilise le fait que le symétrique d'un point $M(x; y)$ par rapport à la première bissectrice est le point $M'(y; x)$.

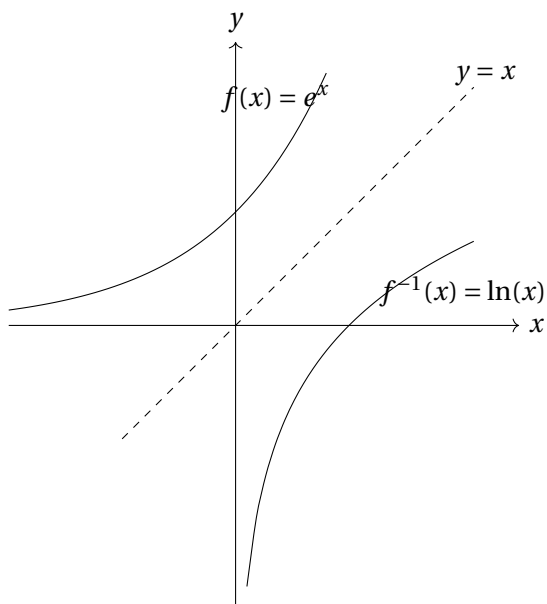
Ainsi, pour tout $(x; y) \in I \times J$,

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C}_f &\iff y = f(x) \\ &\iff x = f^{-1}(y) \\ &\iff M'(y; x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}} \end{aligned}$$

□



Question 3. Tracer les courbes des fonctions $\exp$ et $\ln$ afin d'illustrer la symétrie indiquée par la proposition 1.3.



Exercices

Exercice 1. Montrer que chacune des fonctions suivantes est une bijection et déterminer sa réciproque.

1. $f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{-5x+3}{2} \end{cases}$
2. $g: \begin{cases}]-1; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5\ln(x+1) - 3 \end{cases}$
3. $h: \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow & [1; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 + 1 \end{cases}$

Exercice 2. Donner plusieurs fonctions qui ne sont pas bijectives et plusieurs fonctions qui sont bijectives. On veillera à bien définir les ensembles de départ et d'arrivée des différentes fonctions.

Exercice 3. On commence par rappeler la définition suivante.

Définition 1.4 – Valeur absolue

- La **valeur absolue d'un nombre réel** x , notée $|x|$ est le réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- La **fonction valeur absolue** est la fonction suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{cases}$$

1. Étudier le signe et les variations de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$. La fonction valeur absolue est-elle bijective?
2. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto 2x + |x| + 1 \in \mathbb{R}$ est bijective et déterminer sa réciproque.
3. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}x + |x| + 1 \in \mathbb{R}$ n'est pas bijective.
4. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto ax + |x| + 1$ est-elle bijective? Déterminer sa réciproque le cas échéant.

Exercice 4. Le coût de production c d'une entreprise dépend de la quantité produite q . Plus précisément, on a

$$c = C(q) = 2q^2 + 5q + 100.$$

1. La fonction $C: \mathbb{R} \longrightarrow C(\mathbb{R})$ est-elle bijective?
2. Si l'on se restreint à l'intervalle $I = [0; +\infty[$, montrer que la fonction $C: [0; +\infty[\longrightarrow [100; +\infty[$ est alors bijective et déterminer l'expression de sa fonction réciproque.

Chapitre 2

Continuité

Dans toute ce chapitre, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$.

I Définitions

Définition 2.1 – Continuité en un point

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in D$. On dit que f est continue en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Définition 2.2 – Continuité sur un ensemble

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue sur D si pour tout $a \in D$, f est continue en a .

Exemple 3. La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{1}{x}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^*$?

Solution : Oui car elle est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$

Définition 2.3 – Ensemble image

Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On appelle **ensemble image de D par f** l'ensemble :

$$\begin{aligned} f(D) &= \left\{ f(x), \text{ tel que } x \in D \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}, \text{ tel que } y \text{ admet un antécédent par } f \right\} \end{aligned}$$

Exemple 4. Soit $f : x \longmapsto x^2$. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f([1;2])$, $f(]-6;-1])$ et $f(]-2;1])$.

Solution : $f(\mathbb{R}) = [0; +\infty[$, $f([1;2]) = [1;4]$, $f(]-6;-1]) = [1;36[$ et $f(]-2;1]) = [0;4[$.

II Théorème des valeurs intermédiaires

On donne plusieurs versions du théorème des valeurs intermédiaires (TVI), en commençant par la version rencontrée au lycée.

II.1 TVI, version 1

Théorème 2.4 – Valeurs intermédiaires

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $f(a) < 0 < f(b)$ alors il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Corollaire 2.5

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante.

Si $f(a) < 0 < f(b)$ alors il existe un unique réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Remarque.

- Le corollaire peut également s'énoncer pour une fonction strictement décroissante en supposant alors que $f(b) < 0 < f(a)$.
- La valeur 0 ne joue en fait aucun rôle dans les hypothèses du TVI et on peut donc la remplacer par n'importe quelle valeur réelle. On obtient ainsi une seconde version du TVI.

II.2 TVI, version 2

Théorème 2.6 – Valeurs intermédiaires

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $f(a) < c < f(b)$ alors il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = c$.

Corollaire 2.7

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante.

Si $f(a) < c < f(b)$ alors il existe un unique réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = c$.

On peut enfin proposer une troisième version, utilisant la notion d'ensemble image.

II.3 TVI, version 3

Théorème 2.8 – Valeurs intermédiaires

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration. On utilise le fait qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si il vérifie la propriété suivante :

$$\text{pour tous } a, b \in E, \quad a < c < b \implies c \in E.$$

On considère une fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I . On veut montrer que $f(I)$ est un intervalle.

Soit $y_1, y_2 \in f(I)$. On suppose que $y_1 < c < y_2$. il s'agit de montrer que $c \in f(I)$.

Or, par définition de $f(I)$, on sait qu'il existe $x_1 \in I$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $x_2 \in I$ tel que $y_2 = f(x_2)$.

On a $f(x_1) < c < f(x_2)$ et comme f est continue sur I (donc continue sur $[x_1; x_2]$), on déduit du théorème des valeurs intermédiaires (version 2) qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $c = f(x_0)$. Cela signifie exactement que $c \in f(I)$. $\square$

Corollaire 2.9 – Théorème de la bijection

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors $f(I)$ est un intervalle et la fonction $f : I \rightarrow f(I)$ est bijective.

Démonstration. Le fait que $f(I)$ est un intervalle découle de la continuité de f et du théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.8).

Par définition de $f(I)$, tous les éléments de $f(I)$ admettent un antécédent par la fonction f . De plus, comme f est strictement monotone, il n'en admettent qu'un seul d'après le corollaire du TVI (corollaire 2.7) $\square$

Proposition 2.10

Si $f : I \rightarrow f(I)$ est une fonction bijective et continue, alors f^{-1} est continue.

Démonstration. Cette proposition peut être vue comme une conséquence du fait que la courbe de f^{-1} est le symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice. $\square$

Exemple 5. Si I et J sont deux intervalles et si $f : I \rightarrow J$ est bijective, est-elle nécessairement continue? strictement monotone?

Exemple 6. Montrer que si $f : I \rightarrow f(I)$ est une fonction bijective et continue, alors f est nécessairement strictement monotone.

Solution : Supposons par l'absurde, qu'il existe par exemple $a < b < c$ tels que

$$f(a) \leq f(c) \leq f(b).$$

D'après le TVI (version 2), il existerait $d \in [a; b]$ tel que $f(c) = f(d)$. Or, comme $a < b < c$, on a nécessairement $c \neq d$. Cela signifie donc que $f(c)$ admet deux antécédents et que f n'est donc pas bijective.

Les cas où $f(c) \leq f(a) \leq f(b)$, $f(b) \leq f(a) \leq f(c)$ et $f(b) \leq f(c) \leq f(a)$ se traitent de manière analogue.

III Théorème des bornes atteintes

Le théorème suivant est très utile en pratique même si sa démonstration est plus délicate et hors programme dans le cadre de ce cours.

III.1 Théorème des bornes atteintes, version 1

Théorème 2.11 – bornes atteintes

Si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue définie sur le segment $[a; b]$, alors f est bornée et elle atteint ses bornes (son minimum et son maximum).

Autrement dit, il existe $M \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $x_0 \in [a; b]$ et $x_1 \in [a; b]$ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in [a; b], & m \leq f(x) \leq M \\ f(x_0) = m \\ f(x_1) = M \end{cases}$$

Remarque. Par définition, un segment est un intervalle fermé et borné.

Question 4. Le théorème des bornes atteintes est-il vrai si on remplace le segment $[a; b]$ par l'intervalle ouvert $]a; b[$?

Solution : Non, il suffit de considérer par exemple la fonction $f : x \in]0; 1[\mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée.

III.2 Théorème des bornes atteintes, version 2

Théorème 2.12 – bornes atteintes

Si I est un segment, et si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $f(I)$ est un segment.

Remarque.

- Cette version découle de la première version du théorème des bornes atteintes et du TVI. En effet, le TVI (version 3) assure que $f(I)$ est un intervalle. De plus, cet intervalle est borné (car f est bornée d'après le théorème 2.11) et il est fermé (car la fonction atteint ses bornes).
- On pourra retenir la formulation suivante : « l'image continue d'un segment est un segment ».

Exercices

Calculs de limites

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, donnez l'ensemble de définition et trouvez les limites aux bornes.

1. $f_1 : x \mapsto -2x^4 - 4x^3 + 2x - 1$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 1}{4x^2 - 1}$
3. $f_3 : x \mapsto \frac{2x^2 - x - 5}{x - 1}$
4. $f_4 : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{x}}{4\sqrt{x} + 1}$
5. $f_5 : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2 - x + 5}$

Continuité

Exercice 6.

Soit la fonction $f : x \in]0; +\infty[\mapsto x + \ln(x)$. Montrer que f est bijective de $]0; +\infty[$ dans $f([0; +\infty[)$ puis déterminer $f([0; +\infty[)$.

Exercice 7.

Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x + e^{-x}$. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ puis déterminer $f(\mathbb{R})$.

Exercice 8.

Soit la fonction $f : x \in]-1; +\infty[\mapsto \frac{e^x}{x+1} \in \mathbb{R}$. La fonction f est-elle bijective?

Exercice 9.

Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x + |x|$. La fonction f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$?

Exercice 10.

Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - \cos(x) \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle puis déterminer cet ensemble.

2. La fonction f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$?

3. Déterminer un intervalle I sur lequel f est bijective de I dans $f(I)$.

Exercice 11. Soit $D(p) = \frac{100}{p+1}$ la demande d'un bien en fonction de son prix $p \geq 0$, et $O(p) = p^2 + 10$ l'offre.

1. Montrer que la fonction g définie par $g(p) = D(p) - O(p)$ est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que g est une bijection de $[0; +\infty[$ dans $g([0; +\infty[)$ puis déterminer $g([0; +\infty[)$.
3. Justifier qu'il existe un unique prix d'équilibre $p^* \geq 0$ tel que $D(p^*) = O(p^*)$.
4. Est-il simple de déterminer la valeur exacte de p^* ?

Exercice 12. Une entreprise produit un bien dont le coût total de production est donné par

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 100 \quad \text{pour } q \in [0; 10]$$

où q est la quantité produite. Le prix de vente unitaire est $p(q) = 150 - 3q$.

1. Justifier sans calcul que la fonction de profit $\pi : q \in [0; 10] \mapsto qp(q) - C(q)$ admet un maximum sur $[0; 10]$.
2. Calculer ensuite la quantité q^* qui maximise le profit ainsi que le profit maximal.
3. Répondre aux mêmes questions pour le minimum.

Chapitre 3

Dérivabilité

I Dérivée et élasticité

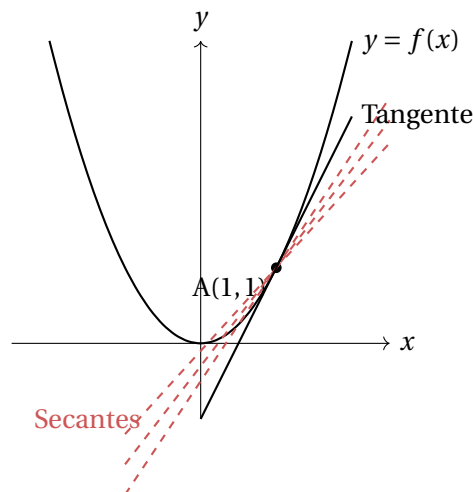
Définition 3.1 – Nombre dérivé

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

On appelle **nombre dérivé** cette limite et on la note $f'(a)$. On a donc :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Graphiquement, le nombre dérivé $f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a .



- En écrivant $\Delta x = (a + h) - a$ et $\Delta f = f(a + h) - f(a)$, on voit que $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

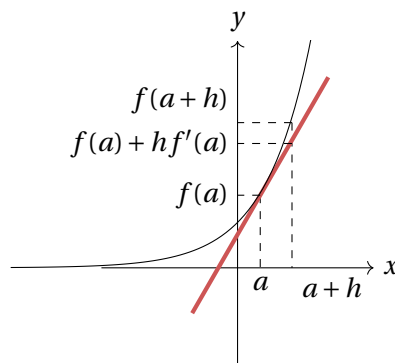
Cela conduit à noter $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

Proposition 3.2 – Équation de la tangente

Soit f une fonction dérivable en a . L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(a; f(a))$ est :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

En approximant une courbe par sa tangente et en posant $x = a + h$, on peut, pour h proche de 0, écrire : $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$.



Exercice type. On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Donner une valeur approchée du coût de production de 203 unités de biens.

Solution :

On note $q_0 = 200$, $q = 203$ et $\Delta q = q - q_0 = 3$.

$$\begin{aligned} C(203) &\simeq C(q_0) + C'(q_0)\Delta q \\ &\simeq 100 + 0,3 \times 3 \\ &\simeq 100,9 \end{aligned}$$

Remarque.

- $C'(200)$ correspond au coût de production d'une unité de biens supplémentaire.
- $\frac{C(200)}{200} = 0,5$ est le coût moyen de production de 200 unités de biens.

Définition 3.3

En économie, si f est une fonction,

- on appelle **fonction moyenne** de f la fonction f_M définie par $f_M(x) = \frac{f(x)}{x}$.
- on appelle **fonction marginale** de f la fonction f_m définie par $f_m(x) = f'(x)$.

En approchant la fonction f par sa tangente, on voit que $f_m(x) \approx f(x+1) - f(x)$.

Donc $f_m(x)$ est la variation de f correspondant à une augmentation de x de 1 unité.

Retour sur l'exercice précédent :

La production passe de 200 à 203. Le coût passe alors de 100 à 100,9.

Cela correspond à un coût marginal de

$$C'(200) = \frac{dC}{dq}(200) \simeq \frac{100,9 - 100}{203 - 200} \simeq 0,3.$$

D'un point de vue économique, il est préférable de raisonner en pourcentage. Ainsi, on définit la notion d'élasticité correspondant à

$$\frac{\frac{\Delta C}{C}}{\frac{\Delta q}{q}} = \frac{\Delta C}{\Delta q} \times \frac{q}{C} \approx \frac{dC}{dq} \times \frac{q}{C}.$$

Définition 3.4 – Élasticité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $x_0 > 0$ et $f(x_0) \neq 0$. On appelle **élasticité** de f au point a le réel

$$\epsilon_f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{f(a)}}{\frac{h}{a}} = \frac{af'(a)}{f(a)}.$$

- L'élasticité d'une fonction en un point est donc le rapport de sa valeur marginale et de sa valeur moyenne : $\epsilon_f(x) = \frac{f_m(x)}{fM(x)}$.
- Si en un point x , $|\epsilon_f(x)| > 1$, on dit que f est **élastique** en x . Si $|\epsilon_f(x)| < 1$, on dit que f est **inélastique** en x . Enfin, si $|\epsilon_f(x)| = 1$, on dit que f est d'**élasticité unitaire** en x .

Exercice type. On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$. Déterminer l'élasticité de C au point 200. Interpréter.

Solution :

$$\epsilon(200) = \frac{200C'(200)}{C(200)} = \frac{200 \times 0,3}{100} = 0,6.$$

Cela signifie que lorsque la quantité de biens augmente de 1%, le coût de production augmente approximativement de 0,6%. Le coût de production est inélastique en $Q = 200$.

Autres Applications classiques

- Si la demande Q d'un bien dépend des revenus R , $\epsilon_Q(R)$ est appelée l'**élasticité-revenus**.
- Si elle dépend du prix P , $\epsilon_Q(P)$ est appelée l'**élasticité-prix**.

II Dérivation des fonctions réciproques

Proposition 3.5

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective et soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Exemple 7. • Si $f(x) = e^x$, alors $f^{-1}(y) = \ln(y)$. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x \neq 0$. On a donc

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}.$$

• Si $f(x) = x^2$ sur $[0; +\infty[$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 2x \neq 0$. Or, $f(0) = 0$, donc pour tout $y \neq 0$, f^{-1} est dérivable en y et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

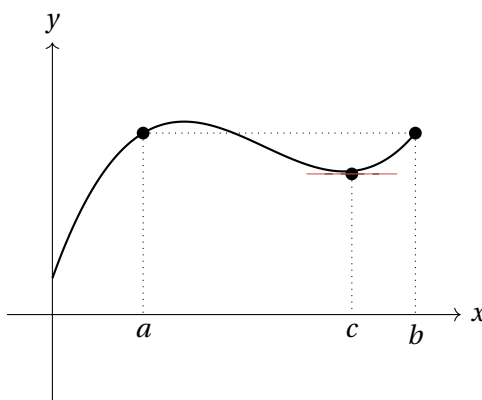
III Accroissements finis

III.1 Thorème de Rolle

On commence par énoncer le théorème de Rolle qui est un cas particulier du théorème des accroissements finis mais qui est plus simple à démontrer.

Théorème 3.6 – Rolle

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a; b]$. On suppose de plus que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Démonstration. f étant continue sur $[a, b]$ elle atteint son max et son min sur $[a, b]$. En outre, l'une de ces deux valeurs, est nécessairement atteinte en un point $c \in]a, b[$, sinon f serait constante. Ce point c est alors un extremum de f donc $f'(c) = 0$ (d'après la proposition 2.11). $\square$

III.2 Théorème des accroissement finis

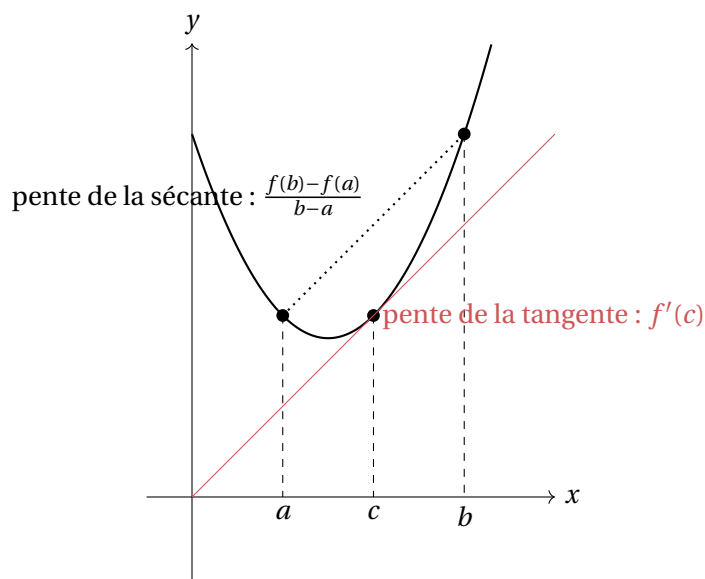
Le théorème de Rolle se généralise de la façon suivante.

Théorème 3.7 – Accroissements finis

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a; b]$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Remarque. Graphiquement, cela signifie que, pour une fonction suffisamment régulière, lorsque l'on considère deux points A et B d'abscisses respectives a et b sur la courbe, il existe toujours un point entre a et b dont la tangente est parallèle à la sécante [AB].



Démonstration. Cette formule est en fait une application directe du théorème de Rolle à la fonction $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. En effet $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$, donc d'après Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
On en déduit donc que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. □

III.3 Inégalité des accroissements finis

Proposition 3.8 – Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . On suppose de plus que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$. Alors, pour tous $x, y \in I$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Remarque. La proposition 3.8 peut s'interpréter en économie : si le coût marginal (c'est-à-dire le coût de production d'une unité supplémentaire) est toujours inférieure à M (en valeur absolue), la variation du coût total sera inférieure au produit de M par la quantité de biens produite.

Démonstration. Soient $x, y \in I$. f est dérivable sur I donc, *a fortiori* sur $[x, y]$. Ainsi, il existe $c \in]x, y[$ tel que $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$.

Or, $|f'(c)| \leq M$ donc $\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq M$.

Par conséquent, on en déduit que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. □

IV Formules de Taylor

L'idée générale de cette partie est d'approcher localement une fonction par un polynôme. Cela permet de simplifier certains calculs et est utile dans le calcul de limites par exemple.

Dans toute cette partie, on considère donc une fonction f et un réel x_0 au voisinage duquel on souhaite approcher f .

IV.1 Développements à l'ordre 1

Si l'on veut approcher f par un polynôme de degré 1 (une fonction affine), on va l'approcher naturellement par la tangente en x_0 .

Ainsi, pour x proche de a ,

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 3.9

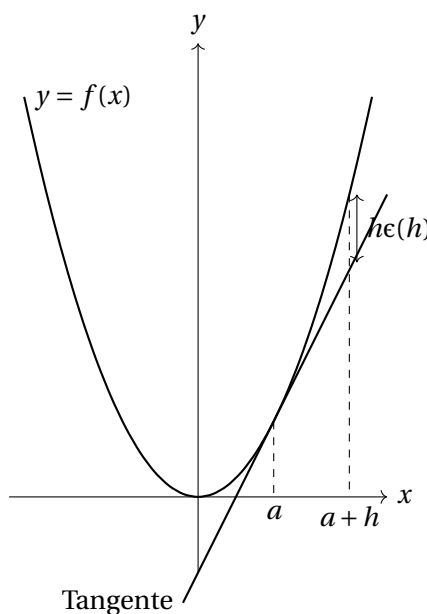
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Alors il existe une fonction ϵ définie sur $V_0 \subset I$, un voisinage de 0, telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ et telle que pour tout $h \in V_0$,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h).$$

Remarque.

- Le terme $h\epsilon(h)$ mesure ainsi l'erreur commise entre la courbe et sa tangente.
- En posant, $x = a + h$, une autre façon d'écrire l'égalité de la proposition 3.9 est :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\epsilon(x - a).$$



Démonstration. Soit f dérivable sur un intervalle I et soit $a \in I$.

On considère un intervalle V_0 suffisamment petit autour de 0 pour que, pour tout $h \in V_0 \cap I$, $a + h \in I$. On pose alors, pour tout $h \in V_0$ non nul,

$$\epsilon(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

On pose de plus $\epsilon(0) = 0$.

L'égalité $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h)$ découle directement de la définition de ϵ . De plus, comme f est dérivable en a , $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ □

IV.2 Développements de Taylor à l'ordre n **Proposition 3.10 – Formule de Taylor-Young (admise)**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable en a . Alors, il existe une fonction ϵ définie sur V_0 , un voisinage de 0, telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ et telle que pour tout $h \in V_0$,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n\epsilon(h)$$

La formule de Taylor Young s'applique classiquement aux fonctions suivantes **au voisinage de 0** :

$\frac{1}{1-h}$	$= 1 + h + h^2 + \dots + h^n + h^n\epsilon(h)$	$= \sum_{k=0}^n h^k + h^n\epsilon(h)$
$\frac{1}{1+h}$	$= 1 - h + h^2 - \dots + (-1)^n h^n + h^n\epsilon(h)$	$= \sum_{k=0}^n (-1)^k h^k + h^n\epsilon(h)$
e^h	$= 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 \dots + \frac{1}{n!}h^n + h^n\epsilon(h)$	$= \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} + h^n\epsilon(h)$
$\ln(1+h)$	$= h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}h^n + h^n\epsilon(h)$	$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} h^k + h^n\epsilon(h)$
$(1+h)^\alpha$	$= 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}h^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}h^n + h^n\epsilon(h)$	$= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} h^k + h^n\epsilon(h)$

Remarque. Dans le développement limité de $(1+h)^\alpha$, α est un réel quelconque (positif ou négatif).

Le terme $\binom{\alpha}{k}$ est, par définition, le réel défini par

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Dans le cas où α est entier, on retrouve la définition des coefficients binomiaux, ce qui justifie d'ailleurs la notation employée.

Question 5. Écrire le développement limité à l'ordre $n = 3$ de $f(h) = \sqrt{1+h}$ en 0.

Solution : $\sqrt{1+h} = (1+h)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + h^3\epsilon(h)$.

Méthode – Calculer une limite avec un développement limité

Lorsque les méthodes classiques de calcul de limites ne fonctionnent pas, on se tourne vers les développements limités.

Exercice type. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x(1-x)}$.

Solution : Il existe une fonction ϵ définie au voisinage de 0 telles que $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ et telle que $\ln(1+h) = h + h\epsilon(h)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x^2)}{x(1-x)} &= \frac{x^2 + x^2\epsilon(x^2)}{x(1-x)} \\ &= \frac{x + x\epsilon(x^2)}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Remarque. Dans l'exercice précédent, on aurait pu faire apparaître le terme $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ et conclure grâce à un taux de variations. Ce genre d'astuce est néanmoins pas toujours facile à trouver et l'utilisation des développements limités est préférable.

Exercice type. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Solution : Pour tout $x > 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

de plus, il existe une fonction ϵ définie au voisinage de 0 telles que $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ et telle que $\ln(1 + h) = h + h\epsilon_1(h)$.

Or, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{1 + \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e$$

Exercices

Exercice 13. La fonction $C : q \in]0; +\infty[\mapsto C(q)$ modélise le coût total de production exprimé en milliers d'euros d'une quantité d'articles q exprimée en milliers d'articles. On suppose que C est dérivable sur $]0; +\infty[$.

1. On note $CM(q)$ le coût moyen de production en euros par article produit. Rappeler l'expression de $CM(q)$.
2. Quelle est la définition mathématique du coût marginal de production? Comment peut-on l'interpréter?
3. Montrer que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.

Exercice 14. (Élasticité et opérations)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit λ un réel.

Montrer que, pour tout $x \in I$:

1. $\varepsilon_{\lambda f}(x) = \varepsilon_f(x)$
2. $\varepsilon_{fg}(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)$
3. $\varepsilon_{\frac{1}{f}}(x) = -\varepsilon_f(x)$

Application : Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{e^x} \in \mathbb{R}$.

Calculer l'élasticité de f au point x .

Exercice 15. (Tiré du bac ES, juin 2008, Liban)

On suppose que la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+8)e^{-0,5x}$$

modélise la demande d'un produit informatique. Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines d'euros.

1. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, calculer l'élasticité de f au point x et étudier son signe. Interpréter par une phrase en français.
2. Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à $-3,5$.
3. Comment évolue la demande lorsque le prix passe de 800 à 804 euros?

Exercice 16. Le coût total de production est $C(q) = e^{0,1q}$.

1. Déterminer l'expression du coût marginal $C'(q)$.
2. En faisant un développement de Taylor à l'ordre 1 de C' en $q = 10$, et en utilisant le fait que $e \approx 2,718$, calculer une valeur approchée de $C'(10, 1)$.

Exercice 17. Le profit d'une entreprise en fonction de la quantité produite q est donné par :

$$\pi(q) = \ln(1+q) + \frac{1}{1+q}, \quad \text{pour } q \in [0; 1].$$

1. Déterminer un développement de Taylor de $\pi(q)$ à l'ordre 2 autour de $q = 0$.
2. Avec la calculatrice, en déduire une approximation de $\pi(0,1)$ et comparer avec la valeur exacte de $\pi(0,1)$.
3. Reprendre les mêmes questions en faisant un développement à l'ordre 3. Comparer ensuite les valeurs approchées de $\pi(0,1)$ obtenues.

Exercice 18. Avec un développement de Taylor, calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1}{xe^x}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x) - x}{x^2}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/3} - 1 - \ln(x)}{(x-1)^2}$;
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1+x}{x} \right)$;
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - 1 + x}{(x-1)^2}$.

Exercice 19. Soit

$$f : x \in]1; +\infty[\mapsto \frac{x^3 - 3x^2 - x + 2}{x - 1}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer quatre nombres réels a, b, c et d tels que, pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-1}.$$

2. Avec un développement de Taylor, trouver l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en 0 et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ qu'il y a de 0.
3. Avec un développement de Taylor, montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2. On pourra commencer par rappeler une condition suffisante pour qu'une fonction admette un point d'inflexion.

Exercice 20. On considère un marché pour lequel les données suivantes sont disponibles.

Prix p (€)	Quantité demandée $D(p)$ en milliers
10	90
20	70
30	50
40	30
50	10

1. Représenter graphiquement la fonction $D : p \mapsto D(p)$ (on reliera les points donnés en construisant une fonction affine par morceaux).
2. Calculer, pour chacun des intervalles considérés, la demande marginale.
3. Calculer $(D^{-1})'(60)$ et interpréter le résultat par une phrase.

Exercice 21. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 5x + 3 \in \mathbb{R}$ est bijective. Déterminer sa fonction réciproque puis vérifier la formule donnant la dérivée de la fonction réciproque.

- Exercice 22.**
1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto xe^x$ est bijective de $[-1; +\infty[$ dans $f([-1; +\infty[)$.
 2. Déterminer $f([-1; +\infty[)$.
 3. f^{-1} est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?
 4. Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Chapitre 4

Calcul intégral

I Primitives

Dans ce qui suit, on considérera un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 4.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et vérifie : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Exemple 8. La fonction $F : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ est une primitive de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x^2$.

Proposition 4.2 – Existence d'une primitive (admise)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I .

Proposition 4.3

Soit f une fonction continue sur I et F_0 une primitive de f sur I . Soit F une fonction dérivable sur I . Alors F est une primitive de f si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F = F_0 + k$.

Remarque. Autrement dit, les primitives d'une fonction diffèrent d'une constante. Par ailleurs, comme les primitives ne sont pas uniques, on parle **d'une** primitive de f et non pas de **la** primitive de f .

Démonstration. Supposons que F est une primitive de f . Alors, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x) = F_0'(x)$.

Par conséquent, la fonction $F - F_0$ a une dérivée nulle sur I et elle est donc constante sur I .

Ainsi, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $(F - F_0)(x) = k$ et on en déduit donc que $F = F_0 + k$.

Réciproquement, il est immédiat de vérifier que les fonctions de la forme $x \mapsto F_0(x) + k$ ont pour dérivée f . $\square$

Remarque. Le fait que I soit un intervalle est primordial. On a en effet utilisé le fait que si une fonction a une dérivée nulle, alors elle est constante. Si l'ensemble de définition n'est pas un intervalle, ce résultat est faux.

On peut par exemple penser à la fonction de Heaviside définie $H(x) = 1$ si $x > 0$ et 0 si $x < 0$. Sa dérivée est constante égale à 0 mais H n'est pas constante.

Remarque. Le calcul des primitives se fait à partir du tableau de calculs des dérivées, en le lisant en quelque sorte « à l'envers ». On pourra néanmoins retenir quelques formes à savoir identifier : $u' u$, $u' u^n$, $\frac{u'}{u}$ (se primitive en $\ln(|u|)$), $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

A retenir également que x^α se primitive en $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

II Intégrales : Définition et premières propriétés

Définition 4.4

Soit f une fonction définie sur I admettant une primitive F sur I . Soient a et b des éléments de I , on définit alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

On note aussi :

$$F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b.$$

Remarque.

- Dans l'expression $\int_a^b f(x) dx$, la variable x est muette, elle signifie qu'on cherche une primitive de f par rapport à x . On peut donc remplacer par t , s , u ... etc.
- Pour que la définition soit correcte, il faut démontrer qu'elle ne dépend pas de la primitive F choisie. Or, cela est bien le cas car, d'après la proposition 4.3, deux primitives diffèrent d'une constante. Ainsi, si F_1 et F_2 sont deux primitives de f , alors $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$.

Théorème 4.5 – (admis)

La quantité $\int_a^b f(x) dx$ donne l'aire algébrique sous le graphe de la fonction f , comprise entre a et b .

Proposition 4.6

Soit f une application continue sur I et soit $a \in I$.

L'application $F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Démonstration. Soit G une primitive de f . Alors, par définition de l'intégrale, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) - G(a)$. Par conséquent, $F' = G' = f$ et F est bien une primitive de f . De plus, $F(a) = G(a) - G(a) = 0$. On a donc montré que F est une primitive de f qui s'annule en a .

Montrons maintenant l'unicité. Supposons qu'il existe une autre primitive $\tilde{F}$ de f qui s'annule en a .

D'après la proposition 4.3, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F = \tilde{F} + k$. En évaluant pour $x = a$, on obtient $F(a) = \tilde{F}(a) + k$ et donc $k = 0$, d'où $F = \tilde{F}$. $\square$

Remarque. Comme la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a , on notera souvent $\int f(x) dx$ (sans préciser les bornes de l'intégrale) l'ensemble des primitives de f . Il ne faut

pas oublier que cela signifie $\int_a^x f(t) dt$ pour a quelconque.

Exemple 9. Calculer $\int e^{2x} dx$.

Solution : $\int e^x dx = \frac{1}{2} e^x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Les propriétés suivantes sont admises même si elles s'interprètent facilement en terme d'aire sous la courbe (la relation de Chasles par exemple).

Proposition 4.7 – (admise)

Soient f, g des fonctions continues sur I , et a, b, c des éléments de I .

1. **Relation de Chasles.** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
2. **Positivité de l'intégrale.** Si f est positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
3. **Croissance de l'intégrale.** Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
4. **Linéarité de l'intégrale.** Pour tous λ, μ réels, on a :

$$\lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx.$$

5. **Inégalité triangulaire.** $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

De plus, dès lors que la fonction à intégrer possède certaines propriétés particulières, on peut se ramener à un calcul simplifié de l'intégrale.

Proposition 4.8

Soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b des éléments de I .

- Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
- Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
- Si f est T -périodique alors $\int_{a+kT}^{b+kT} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ pour tout entier k .

Exemple 10. Calculer $\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$.

Solution :

La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ est impaire sur $[-1; 1]$ donc

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx = 0.$$

III Intégration par parties

Définition 4.9

On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ si f est dérivable sur $[a, b]$ et si f' est une fonction continue sur $[a, b]$.

Théorème 4.10

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ alors :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt.$$

Démonstration. On sait que $(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv' = (uv)' - u'v$.

En intégrant entre a et b , on obtient ainsi l'égalité annoncée. $\square$

Exemple 11. Calculer $\int_0^1 t e^t dt$.

Solution :

On procède par intégration par parties en posant u et v (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$) telles que :

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^t \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_0^1 t e^t dt = [t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1 - 1 = 0.$$

Exemple 12. Calculer $\int \ln(x) dx$.

Solution : Soit $a \in]0; +\infty[$ et soit $x \in]0; +\infty[$. On veut calculer $\int_a^x \ln(t) dt$. On procède par intégration par parties en posant u et v (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$) telles que :

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = t \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_a^x \ln(t) dt = [t \ln(t)]_a^x - \int_a^x 1 = x \ln(x) - x + a \ln(a) - a$$

Au final, l'ensemble des primitives cherchées sont :

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Remarque. Lorsqu'on calcule des primitives par intégration par parties, on pourra omettre de noter les bornes. Dans l'exemple précédent, la quantité $a \ln(a) - a$ est de toute façon intégrée dans la constante k . Ainsi, on écrira :

$$\int \ln(x) dx = [x \ln(x)] - \int 1 dx = x \ln(x) - x + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$



IV Changement de variables

Théorème 4.11

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ et $g : \varphi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(u) du = \int_a^b \varphi'(t) \cdot g(\varphi(t)) dt.$$

Exemple 13. Calculer $I = \int_0^2 \frac{du}{1 + \sqrt{u}}$.

Solution :

L'idée générale est de faire le changement de variable $t = \sqrt{u}$.

On pose $\varphi(t) = t^2$ pour $t \in [0; \sqrt{2}]$ ($a = 0$ et $b = \sqrt{2}$). On pose également $g(u) = \frac{1}{1 + \sqrt{u}}$ pour tout $u \in \varphi([0; \sqrt{2}]) = [0; 2]$. Ainsi, on obtient :

$$\int_0^2 \frac{1}{1 + \sqrt{u}} du = \int_0^{\sqrt{2}} \varphi'(t) \frac{1}{1 + \sqrt{\varphi(t)}} dt = \int_0^{\sqrt{2}} 2t \times \frac{1}{1 + \sqrt{t^2}} dt = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t}{1 + t} dt$$

On verra dans la partie suivante comment calculer ensuite l'intégrale d'une fraction rationnelle. Pour ce qui est de cet exemple, on se contentera d'utiliser l'astuce suivante :

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t + 2 - 2}{1 + t} dt = \int_0^{\sqrt{2}} 2 + \frac{1}{1 + t} dt = \left[2t + \ln|1 + t| \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Remarque.

- En pratique, on écrira simplement « on pose $t = \sqrt{u}$ » en vérifiant que la fonction φ donnant l'ancienne variable en fonction de la nouvelle (la fonction carrée ici) est bien de classe $\mathcal{C}^1$.
- La difficulté provient du fait que le théorème s'applique avec l'application φ qui est la réciproque de l'application racine carrée qui est le changement de variable « naturel » à effectuer.
- Par ailleurs, en écrivant que $u = \varphi(t)$ et en utilisant la notation « des physiciens » pour la dérivée, on a $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)$. On peut ainsi retenir que $du = \varphi'(t)dt$ (bien que cela n'ait pas de sens mathématique) et que pour effectuer un changement de variable, il s'agit donc de remplacer « du » par son expression en fonction de t .
- Pour effectuer un changement de variable, on n'a pas besoin que φ soit injective. Cependant, on préfère souvent définir φ en définissant son application réciproque φ^{-1} (comme c'est le cas ci-dessous) et on utilise donc une application φ bijective.

Autre rédaction de l'exemple 13 :

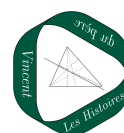
On souhaite calculer $I = \int_0^2 \frac{du}{1 + \sqrt{u}}$. On pose $t = \sqrt{u}$.

- Le changement de variable $u = t^2$ est bien $\mathcal{C}^1$
- $\frac{dt}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2t}$ donc $du = 2t dt$.
- Lorsque u va de 0 à 2, t va de 0 à $\sqrt{2}$.

Ainsi, on obtient :

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t}{1 + t} dt.$$

et on conclut ensuite de la même manière que dans l'exemple 13.



Exemple 14. Calculer $\int \frac{1}{2x \ln(x) + x} dx$ sur $]1; +\infty[$.

Solution :

Soit $a \in]1; +\infty[$, soit $x \in]1; +\infty[$. On cherche à calculer $\int_a^x \frac{1}{2t \ln(t) + t} dt$.

On pose $u = \ln(t)$.

- Le changement de variable $t = e^u$ est bien $\mathcal{C}^1$
- $\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} = \frac{1}{e^u}$ donc $dt = e^u du$.
- Lorsque t va de a à x , u va de $\ln(a)$ à $\ln(x)$.

Ainsi,

$$\int_a^x \frac{1}{2t \ln(t) + t} dt = \int_{\ln(a)}^{\ln(x)} \frac{e^u}{2ue^u + e^u} du = \int_{\ln(a)}^{\ln(x)} \frac{1}{2u + 1} = \frac{1}{2} (\ln(1 + 2 \ln(x)) - \ln(1 + 2 \ln(a)))$$

Par conséquent les primitives cherchées sont les fonctions de la forme :

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 2 \ln(x)) + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Remarque. Là aussi, on peut omettre de noter les bornes des intégrales. On veillera cependant à ce que le changement de variable ($t = e^u$ ici) soit bien surjectif sur $]1; +\infty[$ afin pour toute valeur de $x \in]1; +\infty[$, il existe un antécédent (à placer dans la borne de la nouvelle intégrale).

Autre rédaction de l'exemple 14 :

On souhaite calculer $\int \frac{1}{2x \ln(x) + x} dx$ sur $]1; +\infty[$.

On pose $u = \ln(x)$.

- Le changement de variable $x = e^u$ est bien $\mathcal{C}^1$ et surjectif de $]0; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$.
- $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{e^u}$ donc $dx = e^u du$.

Ainsi,

$$\int \frac{1}{2x \ln(x) + x} dx = \int \frac{e^u}{2ue^u + e^u} du = \int \frac{1}{2u + 1} = \frac{1}{2} \ln|1 + 2u| + k = \frac{1}{2} \ln(1 + 2 \ln(x)) + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

V Primitives de fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes. Pour déterminer une primitive d'une fraction rationnelle, on utilise une méthode de décomposition en éléments simples. On ne donnera pas de résultat théorique à ce sujet mais on illustrera certaines techniques à travers des exemples de plus en plus sophistiqués.

Exemple 15. Calculer $\int \frac{1}{(x-2)(x-5)} dx$.

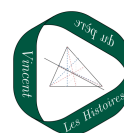
Solution :

On cherche a et b tels que

$$\frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-5} \quad (*)$$

En multipliant l'égalité (*) par $x-2$ puis en posant $x=2$, on obtient :

$$\frac{1}{2-5} = a + \frac{b(2-2)}{2-5}$$



et donc $a = \frac{1}{-3}$.

De même, en multipliant l'égalité (★) par $x - 5$ puis en posant $x = 5$, on obtient : $b = \frac{1}{3}$.

Au final,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-5)} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-5} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Exercices

Exercice 23. Pour chaque fonction, déterminer les primitives sur l'intervalle indiqué :

1. $f(x) = 6x - 5$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = 2e^{-3x} + 4$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = \frac{3}{2x+1}$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
4. $k(x) = \sin(2x) + \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24. Pour chaque fonction, déterminer les primitives sur l'intervalle indiqué :

1. $f(x) = (2x+1)(x^2+x+3)$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = \frac{x^2}{x^3+5}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 25. Pour chaque fonction, déterminer les primitives sur l'intervalle indiqué :

1. $f(x) = (x^2+1)^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = 7e^{2x-3}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 26. Soit f une fonction de la forme $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ telle que $f(0) = 2$ et telle que $f'(0) = 1$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les valeurs de a et b .
2. Déterminer une primitive F de f de la forme $F(x) = (cx+d)e^{-x}$.
3. Calculer, en unités d'aire, la valeur de l'aire de la partie délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 4$.

Exercice 27. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 2x^2 - 5$
2. $f_2 : x \in]1; +\infty[\mapsto \frac{2}{x^2}$
3. $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x^2(x^3-1)^2$
4. $f_4 : x \in [4; +\infty[\mapsto \frac{x}{(x^2-3)^3}$
5. $f_5 : x \in [0; +\infty[\mapsto \sqrt{x}$

Exercice 28.

1. Soit $n \in \mathbb{Q}$. Déterminer les primitives de la fonction

$$x \mapsto x^5(1+x^6)^n.$$

2. En déduire :

$$(a) I_1(x) = \int x^5(1+x^6)^5 dx$$

$$(b) I_2(x) = \int \frac{x^5}{(1+x^6)^5} dx$$

$$(c) I_3(x) = \int x^5 \sqrt{(1+x^6)^3} dx$$

$$(d) I_4(x) = \int \frac{x^5}{1+x^6} dx$$

Exercice 29. On considère les fonctions de demande et d'offre suivantes :

- Demande : $P = 100 - 0,3Q$
- Offre : $P = 10 + 0,2Q$

où P désigne le prix et Q la quantité respectivement demandée et offerte.

1. Déterminer le point d'équilibre (Q^*, P^*) pour lequel l'offre est égale à la demande.
2. Tracer les courbes de demande et d'offre.
3. Le surplus du consommateur est égal à l'aire de la région située sous la courbe de demande et au dessus du prix d'équilibre.
 - (a) Représenter le surplus du consommateur sur le graphe précédent.
 - (b) À l'aide d'une intégrale, exprimer le surplus du consommateur.
 - (c) Calculer cette intégrale.

Exercice 30. A l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 31. A l'aide d'une intégration par parties, calculer les primitives suivantes :

$$\int_0^2 xe^x dx, \quad \int_0^1 x^2 e^x dx \quad \text{et} \quad \int_0^e x^2 \ln x dx$$

Exercice 32. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [1, 2]$, on a :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2. Dédurre de la question précédente la

valeur de l'intégrale $J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx.$

3. Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$ (on fera une intégration par partie).