

Exercices

Exercice 20. Pour chaque fonction, déterminer les primitives sur l'intervalle indiqué :

1. $f(x) = 6x - 5$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = 2e^{-3x} + 4$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = \frac{3}{2x+1}$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
4. $k(x) = \sin(2x) + \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21. Pour chaque fonction, déterminer les primitives sur l'intervalle indiqué :

1. $f(x) = (2x+1)(x^2+x+3)$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = \frac{x^2}{x^3+5}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 22. Pour chaque fonction, déterminer les primitives sur l'intervalle indiqué :

1. $f(x) = (x^2+1)^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = 7e^{2x-3}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 23. Soit f une fonction de la forme $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ telle que $f(0) = 2$ et telle que $f'(0) = 1$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les valeurs de a et b .
2. Déterminer une primitive F de f de la forme $F(x) = (cx+d)e^{-x}$.
3. Calculer, en unités d'aire, la valeur de l'aire de la partie délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 4$.

Exercice 24. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 2x^2 - 5$
2. $f_2 : x \in]1; +\infty[\mapsto \frac{2}{x^2}$
3. $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x^2(x^3-1)^2$
4. $f_4 : x \in [4; +\infty[\mapsto \frac{x}{(x^2-3)^3}$
5. $f_5 : x \in [0; +\infty[\mapsto \sqrt{x}$

Exercice 25.

1. Soit $n \in \mathbb{Q}$. Déterminer les primitives de la fonction

$$x \mapsto x^5(1+x^6)^n.$$

2. En déduire :

$$(a) I_1(x) = \int x^5(1+x^6)^5 dx$$

$$(b) I_2(x) = \int \frac{x^5}{(1+x^6)^5} dx$$

$$(c) I_3(x) = \int x^5 \sqrt{(1+x^6)^3} dx$$

$$(d) I_4(x) = \int \frac{x^5}{1+x^6} dx$$

Exercice 26. On considère les fonctions de demande et d'offre suivantes :

- Demande : $P = 100 - 0,3Q$
- Offre : $P = 10 + 0,2Q$

où P désigne le prix et Q la quantité respectivement demandée et offerte.

1. Déterminer le point d'équilibre (Q^*, P^*) pour lequel l'offre est égale à la demande.
2. Tracer les courbes de demande et d'offre.
3. Le surplus du consommateur est égal à l'aire de la région située sous la courbe de demande et au dessus du prix d'équilibre.
 - (a) Représenter le surplus du consommateur sur le graphe précédent.
 - (b) À l'aide d'une intégrale, exprimer le surplus du consommateur.
 - (c) Calculer cette intégrale.

Exercice 27. À l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 28. À l'aide d'une intégration par parties, calculer les primitives suivantes :

$$\int_0^2 xe^x dx, \quad \int_0^1 x^2 e^x dx \quad \text{et} \quad \int_0^e x^2 \ln x dx$$

Exercice 29. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [1, 2]$, on a :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2. Dédurre de la question précédente la

valeur de l'intégrale $J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$.

3. Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$ (on fera une intégration par partie).