

Exercices

Exercice 13. La fonction $C : q \in]0; +\infty[\mapsto C(q)$ modélise le coût total de production exprimé en milliers d'euros d'une quantité d'articles q exprimée en milliers d'articles. On suppose que C est dérivable sur $]0; +\infty[$.

1. On note $CM(q)$ le coût moyen de production en euros par article produit. Rappeler l'expression de $CM(q)$.
2. Quelle est la définition mathématique du coût marginal de production? Comment peut-on l'interpréter?
3. Montrer que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.

Exercice 14. (Élasticité et opérations)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit λ un réel.

Montrer que, pour tout $x \in I$:

1. $\varepsilon_{\lambda f}(x) = \varepsilon_f(x)$
2. $\varepsilon_{fg}(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)$
3. $\varepsilon_{\frac{1}{f}}(x) = -\varepsilon_f(x)$

Application : Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{e^x} \in \mathbb{R}$.

Calculer l'élasticité de f au point x .

Exercice 15. (Tiré du bac ES, juin 2008, Liban)

On suppose que la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+8)e^{-0,5x}$$

modélise la demande d'un produit informatique. Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines d'euros.

1. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, calculer l'élasticité de f au point x et étudier son signe. Interpréter par une phrase en français.
2. Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à $-3,5$.
3. Comment évolue la demande lorsque le prix passe de 800 à 804 euros?

Exercice 16. Le coût total de production est $C(q) = e^{0,1q}$.

1. Déterminer l'expression du coût marginal $C'(q)$.
2. En faisant un développement de Taylor à l'ordre 1 de C' en $q = 10$, et en utilisant le fait que $e \approx 2,718$, calculer une valeur approchée de $C'(10, 1)$.

Exercice 17. Le profit d'une entreprise en fonction de la quantité produite q est donné par :

$$\pi(q) = \ln(1+q) + \frac{1}{1+q}, \quad \text{pour } q \in [0; 1].$$

1. Déterminer un développement de Taylor de $\pi(q)$ à l'ordre 2 autour de $q = 0$.
2. Avec la calculatrice, en déduire une approximation de $\pi(0,1)$ et comparer avec la valeur exacte de $\pi(0,1)$.
3. Reprendre les mêmes questions en faisant un développement à l'ordre 3. Comparer ensuite les valeurs approchées de $\pi(0,1)$ obtenues.

Exercice 18. Avec un développement de Taylor, calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1}{xe^x}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x) - x}{x^2}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/3} - 1 - \ln(x)}{(x-1)^2}$;
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1+x}{x} \right)$;
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - 1 + x}{(x-1)^2}$.

Exercice 19. Soit

$$f : x \in]1; +\infty[\mapsto \frac{x^3 - 3x^2 - x + 2}{x - 1}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer quatre nombres réels a, b, c et d tels que, pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-1}.$$

2. Avec un développement de Taylor, trouver l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en 0 et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ qu'il y a de 0.
3. Avec un développement de Taylor, montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2. On pourra commencer par rappeler une condition suffisante pour qu'une fonction admette un point d'inflexion.