

Exercices

Calculs de limites

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, donnez l'ensemble de définition et trouvez les limites aux bornes.

1. $f_1 : x \mapsto -2x^4 - 4x^3 + 2x - 1$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 1}{4x^2 - 1}$
3. $f_3 : x \mapsto \frac{2x^2 - x - 5}{x - 1}$
4. $f_4 : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{x}}{4\sqrt{x} + 1}$
5. $f_5 : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2 - x + 5}$

Continuité

Exercice 6.

Soit la fonction $f : x \in]0; +\infty[\mapsto x + \ln(x)$. Montrer que f est bijective de $]0; +\infty[$ dans $f([0; +\infty[)$ puis déterminer $f([0; +\infty[)$.

Exercice 7.

Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x + e^{-x}$. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ puis déterminer $f(\mathbb{R})$.

Exercice 8.

Soit la fonction $f : x \in]-1; +\infty[\mapsto \frac{e^x}{x+1} \in \mathbb{R}$. La fonction f est-elle bijective?

Exercice 9.

Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x + |x|$. La fonction f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$?

Exercice 10.

Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - \cos(x) \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle puis déterminer cet ensemble.

2. La fonction f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$?

3. Déterminer un intervalle I sur lequel f est bijective de I dans $f(I)$.

Exercice 11. Soit $D(p) = \frac{100}{p+1}$ la demande d'un bien en fonction de son prix $p \geq 0$, et $O(p) = p^2 + 10$ l'offre.

1. Montrer que la fonction g définie par $g(p) = D(p) - O(p)$ est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que g est une bijection de $[0; +\infty[$ dans $g([0; +\infty[)$ puis déterminer $g([0; +\infty[)$.
3. Justifier qu'il existe un unique prix d'équilibre $p^* \geq 0$ tel que $D(p^*) = O(p^*)$.
4. Est-il simple de déterminer la valeur exacte de p^* ?

Exercice 12. Une entreprise produit un bien dont le coût total de production est donné par

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 100 \quad \text{pour } q \in [0; 10]$$

où q est la quantité produite. Le prix de vente unitaire est $p(q) = 150 - 3q$.

1. Justifier sans calcul que la fonction de profit $\pi : q \in [0; 10] \mapsto qp(q) - C(q)$ admet un maximum sur $[0; 10]$.
2. Calculer ensuite la quantité q^* qui maximise le profit ainsi que le profit maximal.
3. Répondre aux mêmes questions pour le minimum.