

Variables aléatoires

Licence 1 Réussir bis

2025/2026 : Semestre 2

Yannick VINCENT

Faculté d'économie de Montpellier

www.yannickvincent.fr

Table des matières

1	Variables aléatoires	3
I	Notion de variable aléatoire	3
II	Loi de probabilité d'une variable aléatoire	3
II.1	Espérance	4
III	Variance et Écart-type	4
IV	Transformation affine d'une variable aléatoire	5
2	Loi de Bernoulli et loi binomiale	7
I	Loi de Bernoulli	7
II	Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux	8
II.1	Schéma de Bernoulli	8
II.2	Coefficients binomiaux	8
III	Loi binomiale	9

Chapitre 1

Variables aléatoires

I Notion de variable aléatoire

Définition 1.1

Une **variable aléatoire** sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$.
À chaque issue de Ω , on associe un nombre réel.

Définition 1.2

Soit x un réel. L'événement « $X = x$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x .

Exemple 1.

Avec l'exemple d'introduction :

L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain en euros de l'association sur une partie.

L'événement « $X = 6$ » correspond aux issues 1, 2, 3, 4, 5.

L'événement « $X = -12$ » correspond à l'issue 6.

II Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 1.3

Pour définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

- On liste les valeurs x_i possibles pour X ;
- On détermine les probabilités $P(X = x_i)$.

Méthode – Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

On forme le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Remarque.

Dans le tableau, on a :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Exemple 2.

Avec l'exemple d'introduction : Si X est le gain de l'association sur une partie, la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-12	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

II.1 Espérance

Définition 1.4

Soit X une variable aléatoire. On appelle **espérance** de X le nombre :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Remarque.

Le mot « espérance » vient du langage des jeux : lorsque X désigne le gain, $E(X)$ est le gain moyen que peut espérer un joueur lorsque le nombre de parties est important.

Exemple 3.

Avec l'exemple d'introduction :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = (-12) \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{5}{6} = 3.$$

Cela signifie que le jeu est défavorable au joueur et qu'en moyenne, l'association gagnera 3 euros par partie. Par conséquent, sur 500 parties, elle peut espérer gagner environ 1500 euros.

III Variance et Écart-type

Définition 1.5

Soit X une variable aléatoire.

- On appelle **variance** de X le nombre :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

- On appelle **écart-type** de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple 4.

Avec l'exemple d'introduction :

$$\begin{aligned} V(X) &= p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 \\ &= \frac{1}{6} (-12 - 3)^2 + \frac{5}{6} (6 - 3)^2 \\ &= 45 \end{aligned}$$

On a ainsi, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{45} \simeq 6,71$.

IV Transformation affine d'une variable aléatoire

Proposition 1.6

Si X est une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ et si a et b des réels alors la loi de la variable aléatoire $Y = aX + b$ est donnée par le tableau suivant :

y_i	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	$\dots$	$ax_n + b$
$P(Y = y_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Exemple 5.

Avec l'exemple d'introduction, supposons que l'on multiplie les gains et les pertes par 2 pour chaque partie, on obtient ainsi une nouvelle variable aléatoire $Y = 2X$.

Proposition 1.7

Si X est une variable aléatoire et a et b des réels alors

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 E(aX + b) &= \sum_{i=1}^n p_i(ax_i + b) \\
 &= \sum_{i=1}^n ap_i x_i + bp_i \\
 &= \sum_{i=1}^n ap_i x_i + \sum_{i=1}^n bp_i \\
 &= a \sum_{i=1}^n p_i x_i + b \sum_{i=1}^n p_i \\
 &= aE(X) + b \times 1 \quad \left(\text{car } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right) \\
 &= aE(X) + b
 \end{aligned}$$

□

Proposition 1.8

Si X est une variable aléatoire et a et b des réels alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 V(aX + b) &= \sum_{i=1}^n p_i (ax_i + b - E(aX + b))^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i (ax_i + b - (aE(X) + b))^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i (ax_i + b - aE(X) - b)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i (ax_i - aE(X))^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i (a(x_i - E(X)))^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n a^2 p_i (x_i - E(X))^2 \\
 &= a^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \\
 &= a^2 V(X)
 \end{aligned}$$

□

Proposition 1.9

Si X est une variable aléatoire et a et b des réels alors

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \sigma(aX + b) &= \sqrt{V(aX + b)} \\
 &= \sqrt{a^2 V(X)} \\
 &= \sqrt{a^2} \sqrt{V(X)} \\
 &= |a| \sigma(X)
 \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Loi de Bernoulli et loi binomiale

I Loi de Bernoulli

Définition 2.1 – Loi de Bernoulli

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p lorsque la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Remarque.

En général, l'issue 1 est associée à un succès et l'issue 0 est associée à un échec.

Exemple 6.

On lance un dé équilibré à six faces.

On définit la variable aléatoire X de la manière suivante : $X = 1$ si le résultat est pair et $X = 0$ sinon.

Dans ce cas, X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

Proposition 2.2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Alors,

- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1 - p)$

Démonstration.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Sa loi de probabilité est donnée par le tableau de la définition 2.1. On en déduit la valeur de l'espérance et de la variance :

$$E(X) = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$$

et

$$V(X) = p \times (1 - p)^2 + (1 - p) \times (0 - p)^2 = p(1 - p).$$

□

II Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

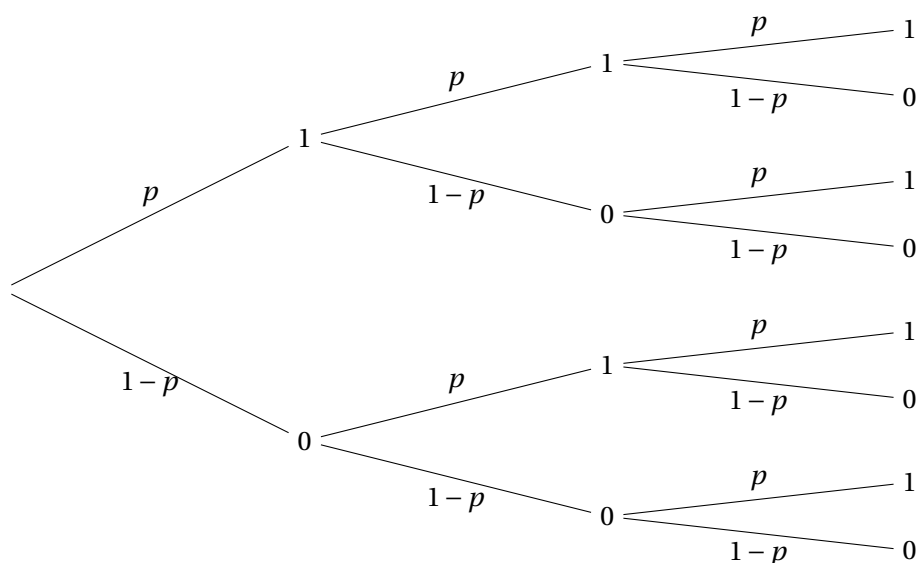
II.1 Schéma de Bernoulli

Définition 2.3 – Schéma de Bernoulli

On considère une expérience aléatoire associée à une variable suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . La répétition n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, de cette expérience est appelée un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p .

Exemple 7.

Cas d'un schéma de Bernoulli pour $n = 3$.



II.2 Coefficients binomiaux

Définition 2.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **factorielle** de n le nombre :

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1.$$

Définition 2.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . Le nombre de chemin correspondant à k succès est noté $\binom{n}{k}$ (on le lit « k parmi n »).

Remarque. Le nombre $\binom{n}{k}$ est également le nombre de façon de choisir k éléments parmi n . En effet, choisir un chemin ayant k succès revient à choisir quelles sont, parmi les n expériences, celles associées à un succès.

Proposition 2.6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque.

La Proposition 1 permet de calculer directement un coefficient binomial. Les calculs de factorielles sont toutefois fastidieux et l'intérêt de cette formule est donc surtout théorique.

Exemple 8.

$$\binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{0} = 1.$$

III Loi binomiale

Définition 2.7 – Loi Binomiale

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenu parmi les n épreuves suit une **loi binomiale** de paramètres n et p .

Proposition 2.8

Soit X une loi binomiale de paramètres n et p . Alors, pour tout $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration.

Pour calculer $P(X = k)$ à partir de l'arbre représentant un schéma de Bernoulli à n épreuves, il faut :

- Déterminer le nombre de chemins à k succès. Il y en a $\binom{n}{k}$.
- Déterminer la probabilité correspondant à un chemin de k succès. Sur un tel chemin, il y a k succès (de probabilité p et $n-k$ échecs (de probabilité $1-p$). La probabilité correspondant à un tel chemin est donc $p^k (1-p)^{n-k}$.

Finalement, on en déduit que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. □

Proposition 2.9

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors

$$E(X) = np.$$

Démonstration.

Pour cette démonstration, on admettra la formule suivante (appelée formule du binôme de Newton) :

$$\text{Pour tous } a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$$

Soit X suivant une loi binomiale de paramètres n et p .

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \times P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{d'après la proposition 3}) \\ &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Or, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$k \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \times \left(\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \right) \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, on pose $i = k - 1$ et on obtient :

$$\begin{aligned} E(X) &= n \times \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i+1} (1-p)^{n-(i+1)} \right) \\ &= np \times \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i} \right) \\ &= np \times (p + (1-p))^{n-1} \quad (\text{en utilisant la formule du binôme de Newton avec } a = p \text{ et } b = 1-p) \\ &= np \times 1^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

□

Exemple 9.

On lance 60 fois un dé équilibré à 6 faces. On note X le nombre de fois où l'on obtient 6. Déterminer $E(X)$.

Solution :

L'expérience consistant à lancer un dé est un schéma de Bernoulli donc la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = \frac{1}{6}$ (la probabilité de succès à chaque étape).

Ainsi, $E(X) = np = 60 \times \frac{1}{6} = 10$.

Cela signifie qu'en lançant 60 fois un dé, on obtiendra en moyenne 10 fois un 6.

Proposition 2.10 – (admise)

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors

$$V(X) = np(1-p).$$