

Calcul différentiel - Exercices

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles par rapport à chacune des variables pour les fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2y + y^2x + xy$
2. $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(x + y)$
3. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
4. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
5. $f(x, y, z) = xyz + x^2y + y^2z$
6. $f(x, y) = x^y$
7. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
8. $f(x, y, z) = e^{xyz}$
9. $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
10. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3$

Exercice 2.

1. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y + 5yx$. Calculer $f_1(3, 2)$ et $f_2(3, 2)$.
2. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\ln(1 + x^2)}{1 + y^2}$. Calculer $f_1(1; 2)$ et $f_2(1; 2)$.

Exercice 3. Pour chaque fonction suivante, déterminer la différentielle $df(a, b)$ au point indiqué.

1. $f(x, y) = x^2y + \ln(y)$ en $(1, 3)$.
2. $f(x, y) = e^{xy} - x^2$ en $(0, 3)$.
3. $f(x, y) = x^y$ en $(2, 3)$.
4. $f(x, y) = \frac{x}{y} + y \ln(x)$ en $(1, e)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f(3, 4) = 7$, telle que $f_1(3, 4) = 1$ et telle que $f_2(3, 4) = 5$. Calculer une approximation de $f(3,002; 4,001)$.

Exercice 5. Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Trouver les points critiques de f et les classer (minima, maxima, points selles).
2. Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extrema de f sous la contrainte $x + y = 1$.

Exercice 6. Soit $f(x, y) = xy - x^2 - y^2$.

1. Trouver les points critiques de f et les classer (minima, maxima, points selles).
2. Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extrema de f sous la contrainte $x + y = 4$.

Exercice 7. Soit la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy$.

1. Trouver les points critiques de f et les classer (minima, maxima, points selles).
2. Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les points critiques de f sous la contrainte $x + y = 1$. Préciser s'il s'agit d'un extremum ou non.

Exercice 8. Soit $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$.

1. Trouver les points critiques de f et les classer.
2. Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extrema de f sous la contrainte $x + 2y = 10$.

Exercice 9. On considère la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ et la contrainte $x + y + z = 1$. Trouver les extrema de f sous cette contrainte.

Exercice 10. Déterminer les valeurs maximales et minimales de la fonction f définie par $f(x, y, z) = x + y - z$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exercice 11. On considère la fonction f définie par $f(x, y) = 4xy$ et la contrainte $x^2 + 2y^2 = 1$. Trouver les extrema de f sous cette contrainte.

Exercice 12. Soit $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3^2$ et $R > 0$ donné. Montrer que la valeur maximale de f sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ est $\left(\frac{R^2}{3}\right)^3$. En déduire l'inégalité

$$(x_1^2 x_2^2 x_3^2)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}.$$

Exercice 13. Trouver le point du cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon $R = 4$ qui est le plus proche du point $(1; 2)$.

