

Calcul numérique et algébrique

Licence 1 Réussir bis

2025/2026 : Semestre 2

Yannick VINCENT

yannick.vincent@umontpellier.fr

Faculté d'économie de Montpellier

www.yannickvincent.fr

Table des matières

1	Calcul numérique	3
I	Nombres entiers relatifs	3
II	Fractions	4
III	Puissances	5
IV	Racines carrées	6
2	Équations et inéquations de degré un	8
I	Premiers éléments de calcul littéral	8
II	Résolution d'équations de degré un	10
III	Résolution d'inéquations de degré un	12
3	Calcul littéral	14
I	Forme factorisée et forme développée	14
II	Développement d'une expression algébrique	14
III	Factorisation d'une expression algébrique	15
IV	Montrer que deux expressions algébriques sont égales	16
4	Calcul littéral et identités remarquables	17
I	Identities remarquables	17
II	Développement d'une expression algébrique	18
III	Factorisation d'une expression algébrique	19
5	Équations de degré supérieur	21
I	Degré d'une équation	21
II	Résolution d'équations de degré supérieur	21

Chapitre 1

Calcul numérique

I Nombres entiers relatifs

Définition 1.1

Un nombre entier relatif est un nombre entier positif ou négatif.

Exemple 1. Les nombres -5 ; 6 ; 0 ; -17 et 33 sont des nombres entiers relatifs.

Proposition 1.2

Pour additionner deux nombres relatifs de même signe :

- On additionne les deux parties numériques sans se soucier des signes
- On met au résultat le signe commun aux deux nombres

Exemple 2. $3 + 7 = 10$ et $(-5) + (-3) = -8$

Proposition 1.3

Pour additionner deux nombres relatifs de signes contraires :

- On calcul la différence entre les deux nombres sans se soucier des signes
- On met au résultat le signe du nombre ayant la plus grande partie numérique

Exemple 3. $3 + (-7) = -4$ et $(-5) + 11 = 6$

Proposition 1.4

Soustraire un nombre relatif, c'est lui ajouter son opposé.

Exemple 4. $(-2) - 3 = (-2) + (-3) = -5$ et $(-3) - (-5) = (-3) + 5 = 2$

Proposition 1.5

Le produit ou le quotient de deux nombres relatifs est :

- positif si les deux nombres sont de même signe ;
- négatif si les deux nombres sont de signes contraires.

Exemple 5. $(-3) \times 2 = -6$ et $(-5) \times (-7) = 35$

Exercice 1. Calculer les expressions suivantes :

a) $-2 + 3 - 7$

b) $(-3) + (-15)$

c) $(-15) + 18$

d) $7 + (-11)$

e) $-2 - (-5)$

f) $-3 - (-6) + 7$

Exercice 2. Calculer les expressions suivantes :

a) $(-4 + 5) - (-5 + 8)$

b) $(-5 - 9 - 4) - (-4)$

c) $-5 + 2 + (-1) - 9$

d) $-2 + (9 - (-5) + 3)$

e) $-3 - (-6 + 3)$

f) $-1 + (-1 - 3)$

II Fractions

Proposition 1.6

Pour additionner ou soustraire des fractions :

- Étape 1 : Réduire au même dénominateur ;
- Étape 2 : Additionner ou soustraire les numérateurs et conserver le dénominateur commun.

Exemple 6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

Proposition 1.7

Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple 7. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$

Proposition 1.8

Il est impossible de diviser par zéro.

Le dénominateur d'une fraction est donc nécessairement différent de zéro.

Démonstration.

On va par exemple montrer que $\frac{1}{0}$ n'a pas de sens.

Effectuer une division revient en fait à résoudre une « multiplication à trou ».

Ainsi, $\frac{1}{0}$ est le résultat de la multiplication à trou suivante : $0 \times \dots = 1$.

Cela est effectivement impossible. □

Proposition 1.9

Diviser par une fraction (différente de zéro) revient à multiplier par son inverse :

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1}.$$

Exemple 8. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$ et $\frac{\frac{7}{5}}{2} = \frac{7}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes au maximum :

a) $\frac{2}{3} + \frac{7}{15}$	c) $\frac{-2}{9} - \frac{-8}{15}$
b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$	d) $\frac{2}{11} + 2$

Exercice 4. Simplifier les expressions suivantes au maximum :

a) $\frac{7}{4} \div 2$	d) $\frac{7}{12} - \frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$
b) $\frac{-2}{9} \times \frac{1}{2} - \frac{-8}{3} \times \frac{5}{4}$	e) $\frac{2}{3} \times 2 + \frac{3}{4}$
c) $\frac{7}{12} \div \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right)$	f) $\frac{2}{3} \times \left(2 + \frac{3}{4}\right)$

Exercice 5. Dans chaque cas, dire si le nombre de chiffres après la virgule de la quantité considérée est finie ou non. Donner ensuite une valeur décimale des quantités suivantes (lorsque cette valeur n'est pas exacte, arrondir à 0,01 près).

a) $1 + \frac{1}{2}$	d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$
b) $\frac{5}{4}$	e) $\frac{3}{8}$
c) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$	f) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$

Exercice 6. Déterminer l'écriture simplifiée de l'expression :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Exercice 7. Montrer que pour tout entier positif non nul n , on a :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

III Puissances

Définition 1.10

- Pour tout nombre a et tout entier strictement positif n :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

- Pour tout nombre a et tout entier strictement positif n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Pour tout nombre a non nul :

$$a^0 = 1.$$

Exemple 9. $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ et $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{16}$

Proposition 1.11

Pour tous entiers relatifs m et n et pour tout nombre a différent de zéro :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Exemple 10.

1. $2^3 \times 2^2 = 2^5$
2. $(3^2)^5 = 3^{10}$
3. $(4 \times 3)^5 = 4^5 \times 3^5$
4. $\frac{5^6}{5^4} = 5^2$

Exercice 8. Effectuer les calculs suivants :

- | | |
|-------------------|----------------------|
| a) $1 + 3^2$ | c) $(2 \times 5)^3$ |
| b) 2×5^3 | d) $2^{-1} + 5^{-2}$ |

Exercice 9. Pour chaque affirmation, justifier si elle est vraie ou fausse.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) $2^{-3} \leq 0$ | c) $(-3)^{-2} \leq 0$ |
| b) $(-2)^{-3} \leq 0$ | d) $-2^2 \leq 0$ |

Exercice 10. Écrire les nombres suivants en écriture décimale.

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a) 10^2 | d) $0,12 \times 10^3$ |
| b) 10^{-4} | e) $0,02 \times 10^{-2}$ |
| c) 14×10^{-1} | f) $0,13 \times 10^4$ |

Exercice 11. Écrire les nombres suivants en écriture scientifique, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^k$ avec $1 \leq a < 10$.

- a) 135
- b) 0,754
- c) 115358
- d) $\frac{1}{4}$
- e) $\frac{1}{8}$
- f) 0,0045

IV Racines carrées

Définition 1.12

Si x est un nombre positif, la racine carrée de x est l'unique nombre positif dont le carré est égal à x . Ce nombre se note $\sqrt{x}$

Ainsi, on a : pour tout $x \geq 0$,

$$(\sqrt{x})^2 = x.$$

Proposition 1.13

Soient x et y deux nombres strictement positifs. On a alors :

1. $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$
2. $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
3. $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Exemple 11.

1. $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$
2. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$
3. $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ *et* $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Proposition 1.14

Soit x un nombre quelconque (positif ou négatif). On a alors :

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 12.

- Si $x = 3$, $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$
- Si $x = -3$, $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$

Exercice 12. Effectuer les calculs suivants :

- | | |
|--|--|
| <p>a) $\sqrt{4}$</p> <p>b) $\sqrt{(-6)^2}$</p> | <p>c) $(\sqrt{11})^2$</p> <p>d) $\sqrt{5^4}$</p> |
|--|--|

Exercice 13. Déterminer, si elle existe, la racine carrée des nombres suivants.

- | | |
|-----------------------------|---|
| <p>a) 121</p> <p>b) -16</p> | <p>c) $\sqrt{121}$</p> <p>d) $(-2)^2$</p> |
|-----------------------------|---|

Exercice 14. Écrire sous la forme $\sqrt{a}$ avec $a > 0$.

- | | |
|---|--|
| <p>a) $\sqrt{7} \times \sqrt{6}$</p> <p>b) $\sqrt{16} + \sqrt{9}$</p> <p>c) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$</p> | <p>d) $2\sqrt{3}$</p> <p>e) $3\sqrt{2}$</p> <p>f) $5\sqrt{7}$</p> |
|---|--|

Exercice 15. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a > 0$ et $b > 0$ tels que b soit le plus petit possible.

- | | |
|--|--|
| <p>a) $\sqrt{45}$</p> <p>b) $\sqrt{50}$</p> <p>c) $\sqrt{8}$</p> <p>d) $\sqrt{24}$</p> | <p>e) $\sqrt{243}$</p> <p>f) $\sqrt{242}$</p> <p>g) $\sqrt{48}$</p> <p>h) $2\sqrt{21}$</p> |
|--|--|

Chapitre 2

Équations et inéquations de degré un

I Premiers éléments de calcul littéral

Définition 2.1

Une **expression littérale** désigne une expression mathématique dans laquelle apparaît des lettres. Ces lettres désignent des nombres dont on ne connaît pas la valeur. Elles sont appelées les **variables**.

Remarque. Par convention, on s'autorise à ne pas noter le signe $\times$ entre un nombre et une lettre. Par exemple, on note $2 \times x = 2x$.

De plus, on ne note pas le nombre 1 lorsqu'il est multiplié par une lettre. Ainsi, $1x = x$.

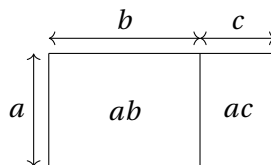
Proposition 2.2

Comme les lettres représentent des nombres, toutes les règles du calcul numérique (règle des signes, fractions, puissances, racines) s'appliquent également aux variables.

Proposition 2.3 – Distributivité simple

Pour tous nombres a , b et c : $a(b + c) = ab + ac$

Démonstration. On considère les rectangles ci-dessous :



L'aire du grand rectangle est $a(b + c)$ alors que les aires des deux petits rectangles sont ab et ac . Cela prouve bien que $a(b + c) = ab + ac$. $\square$

Exemple 13. $2(x + 5) = 2 \times x + 2 \times 5 = 2x + 10$.

Proposition 2.4

- Lorsqu'une parenthèse est précédée d'un signe +, on utilise la distributivité en distribuant le facteur +1.
- Lorsqu'une parenthèse est précédée d'un signe −, on utilise la distributivité en distribuant le facteur −1.

Exemple 14.

1. $x + (3 + x) = x + 1 \times 3 + 1 \times x = x + 3 + x = 2x + 3$
2. $2x - (5 + x) = 2x + (-1) \times 5 + (-1)x = 2x - 5 - x = x - 5$

Exercice 16. Expliquer pourquoi l'on ne peut pas simplifier la somme de deux termes de la forme x^n et x^m lorsque $n \neq m$ mais que l'on peut le faire lorsque $n = m$ (par exemple on ne peut pas simplifier $2x^2 + 3x$ mais on peut simplifier $2x + 3x$).

Exercice 17. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| a) $5x + 7x$ | e) $x^2 + 3x + x^2$ |
| b) $x - 3x$ | f) $6x - 3x^2 + x - 5x^2$ |
| c) $3x \times (-2)$ | g) $1 + 2x^2 \times 3$ |
| d) $-5x \times 3 + 1$ | h) $2x - 1 + x^2 - 7$ |

Exercice 18. Développer et simplifier au maximum les expressions suivantes.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| a) $3(x + 2)$ | e) $-7(x + 1) + 3(2x + 1)$ |
| b) $-(7 + 5x^2)$ | f) $-x(-2x - 1) - (x - 1)$ |
| c) $-(3 - x)$ | g) $(x - 3) \times x$ |
| d) $(x + x^2) - (3x - x^2)$ | h) $-x^3(x^2 + x^4)$ |

Exercice 19. Sans calculatrice, développer et simplifier au maximum les expressions suivantes :

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) $\frac{1}{2}(2x + 3)$ | d) $-\frac{4}{3}\left(-\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right)$ |
| b) $\frac{7}{3}(-15x + 3)$ | e) $\frac{-(2x + 4)}{2}$ |
| c) $\frac{10}{7}(7x^2 + 28x - 10)$ | f) $\frac{4(10x + 15x^2)}{5}$ |

Exercice 20. Sans calculatrice, développer et simplifier au maximum les expressions suivantes :

- a) $x^2(x + 6)$
- b) $7(3x + 2)$
- c) $x(-x + 4)$
- d) $-3(-2x - 1)$

II Résolution d'équations de degré un

Définition 2.5

- Une **équation d'inconnue x** est une égalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres.
- **Résoudre une équation**, c'est trouver l'ensemble de ses solutions, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'égalité est vraie.

Pour résoudre une équation, on utilise la propriété suivante :

Proposition 2.6

Soient a , b et c trois nombres réels (avec $c \neq 0$). Alors,

$$a = b \iff a + c = b + c \quad \text{et} \quad a = b \iff a \times c = b \times c$$

Méthode – Résoudre une équation de degré un

Isoler l'inconnue d'un côté de l'égalité en effectuant les mêmes opérations de chaque côté.

Exemple 15.

1. Résoudre l'équation $5x + 3 = 3x - 7$.

Solution :

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} \overline{} \\ -3x \\ \hline \end{array} & 5x + 3 = 3x - 7 & \begin{array}{c} \overline{} \\ -3x \\ \hline \end{array} \\
 \longrightarrow & 5x + 3 - 3x = 3x - 7 - 3x & \longleftarrow \\
 \\
 \begin{array}{c} \overline{} \\ -3 \\ \hline \end{array} & 2x + 3 = -7 & \begin{array}{c} \overline{} \\ -3 \\ \hline \end{array} \\
 \longrightarrow & 2x + 3 - 3 = -7 - 3 & \longleftarrow \\
 \\
 \begin{array}{c} \overline{} \\ \div 2 \\ \hline \end{array} & 2x = -10 & \begin{array}{c} \overline{} \\ \div 2 \\ \hline \end{array} \\
 \longrightarrow & x = \frac{-10}{2} & \longleftarrow \\
 & x = -5 &
 \end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{-5\}$

2. Résoudre l'équation $\frac{x}{2} + 1 = 2x - 1$.

• **Méthode 1**

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} & \frac{x}{2} + 1 = 2x - 1 & \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|l} \hline +1 \\ \hline \end{array} \rightarrow & \frac{x}{2} + 1 + 1 = 2x - 1 + 1 & \leftarrow \begin{array}{|l} \hline +1 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} & \frac{x}{2} + 2 = 2x & \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|l} \hline -\frac{x}{2} \\ \hline \end{array} \rightarrow & \frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{2} = 2x - \frac{x}{2} & \leftarrow \begin{array}{|l} \hline -\frac{x}{2} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 & 2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right)x & \\
 \\
 \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} & 2 = \frac{3}{2}x & \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|l} \hline \frac{3}{2} \\ \hline \end{array} \rightarrow & \frac{2}{\frac{3}{2}} = x & \leftarrow \begin{array}{|l} \hline \frac{3}{2} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 & 2 \times \frac{2}{3} = x & \\
 \\
 & \frac{4}{3} = x &
 \end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

• **Méthode 2**

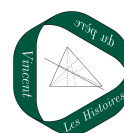
$$\begin{array}{lcl}
 \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} & \frac{x}{2} + 1 = 2x - 1 & \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|l} \hline \times 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow & 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2(2x - 1) & \leftarrow \begin{array}{|l} \hline \times 2 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 & 2 \times \frac{x}{2} + 2 = 4x - 2 & \\
 \\
 \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} & x + 2 = 4x - 2 & \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|l} \hline +2 \\ \hline \end{array} \rightarrow & x + 2 + 2 = 4x - 2 + 2 & \leftarrow \begin{array}{|l} \hline +2 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} & x + 4 = 4x & \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|l} \hline -x \\ \hline \end{array} \rightarrow & x + 4 - x = 4x - x & \leftarrow \begin{array}{|l} \hline -x \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} & 4 = 3x & \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|l} \hline \div 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow & \frac{4}{3} = x & \leftarrow \begin{array}{|l} \hline \div 3 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

Remarque. Attention! Pour résoudre une équation, on effectue les mêmes opérations de chaque côté de l'égalité en respectant bien les priorités d'opérations.

Exercice 21. Résoudre les équations suivantes :

1. $x + 7 = 1$



2. $-2x - 5 = 3x + 2$
3. $-x + 8 = x$
4. $7x + 1 = 0$
5. $-3x = -3$
6. $-2x = \sqrt{2}$

Exercice 22.

Résoudre les équations suivantes :

1. $7(x + 1) = 5x$
2. $-5(-x + 1) = 2x$
3. $\frac{x}{2} + 3 = 4x - 5$
4. $\frac{x}{3} + 3 = x + 5$
5. $\frac{3x}{7} + 3x = 4 - x$
6. $1 - \frac{2x}{3} = 3$
7. $1 = \frac{7x}{3} + 1$
8. $\frac{2x - 3}{4} = \frac{x + 5}{3}$

III Résolution d'inéquations de degré un

Pour résoudre une inéquation, on utilise les propriétés suivantes :

Proposition 2.7

Soient a , b et c trois nombres réels.

$$a \leq b \iff a + c \leq b + c$$

Proposition 2.8

Soient a , b et c trois nombres réels.

- Si $c > 0$: $a \leq b \iff a \times c \leq b \times c$
- Si $c < 0$: $a \leq b \iff a \times c \geq b \times c$

Exemple 16.

On a $2 \leq 3$.

Si on multiplie cette inégalité par (-2) , on voit que :

$$-2 \times 2 \geq -2 \times 3$$

Autrement dit, l'inégalité a changé de sens car -2 est négatif.

Méthode – Résoudre une inéquation de degré un

1. On procède comme pour les équations.
2. On fait attention au sens des inégalités : il change lorsqu'on multiplie ou on divise par un nombre négatif.

Exemple 17.

Résoudre l'inéquation $3x + 3 \leq 5x - 7$.

Solution :

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{c} \overline{\hspace{1cm}} \\ \leftarrow -5x \\ \overline{\hspace{1cm}} \end{array} & 3x + 3 \leq 5x - 7 & \begin{array}{c} \overline{\hspace{1cm}} \\ \leftarrow -5x \\ \overline{\hspace{1cm}} \end{array} \\
 \overline{\hspace{1cm}} & 3x + 3 - 5x \leq 5x - 7 - 5x & \overline{\hspace{1cm}} \\
 \begin{array}{c} \overline{\hspace{1cm}} \\ \leftarrow -3 \\ \overline{\hspace{1cm}} \end{array} & -2x + 3 \leq -7 & \begin{array}{c} \overline{\hspace{1cm}} \\ \leftarrow -3 \\ \overline{\hspace{1cm}} \end{array} \\
 \overline{\hspace{1cm}} & -2x + 3 - 3 \leq -7 - 3 & \overline{\hspace{1cm}} \\
 \begin{array}{c} \overline{\hspace{1cm}} \\ \leftarrow \div(-2) \\ \overline{\hspace{1cm}} \end{array} & -2x \leq -10 & \begin{array}{c} \overline{\hspace{1cm}} \\ \leftarrow \div(-2) \\ \overline{\hspace{1cm}} \end{array} \\
 \overline{\hspace{1cm}} & x \geq \frac{-10}{-2} & \overline{\hspace{1cm}} \\
 & x \geq 5 &
 \end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = [5; +\infty[$

Exercice 23. Résoudre les inéquations :

1. $x + 7 < 1$
2. $-2x - 5 \leq 3x + 2$
3. $-x + 8 \geq x$
4. $7x + 1 \geq 0$
5. $-2x < \sqrt{2}$

Exercice 24. Résoudre les inéquations :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $7(x + 1) \geq 5x$ 2. $-5(-x + 1) < 2x$ 3. $\frac{x}{2} + 3 < 4x - 5$ 4. $\frac{x}{3} + 3 < x + 5$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\frac{3x}{7} + 3x \leq 4 - x$ 6. $1 - \frac{2x}{3} > 3$ 7. $\frac{2x - 3}{4} \leq \frac{x + 5}{3}$ |
|---|--|

Chapitre 3

Calcul littéral

I Forme factorisée et forme développée

Définition 3.1

Distinguer la forme développée et la forme factorisée d'une expression algébrique revient à se poser la question : quelle est la dernière opération effectuée ?

- Dans la **forme développée**, la dernière opération effectuée est une addition ou une soustraction.
- Dans la **forme factorisée**, la dernière opération effectuée est une multiplication ou une division.

Exemple 18.

$x^3 + 3x^2$ est une forme développée.

$x(x + 1)$ est une forme factorisée.

Exercice 25. Déterminer parmi les expressions suivantes, celles qui sont développées et celles qui sont factorisées.

$$A(x) = x^2 + 3x$$

$$B(x) = x(x - 3)$$

$$C(x) = (x + 1)^2$$

$$D(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$E(x) = x^2 - 3x$$

$$F(x) = (x - 4)^2$$

II Développement d'une expression algébrique

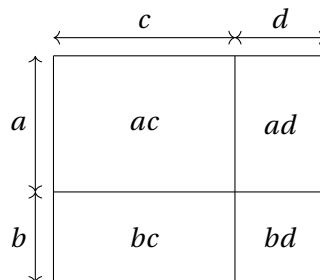
Proposition 3.2 – Distributivité

Pour tous réels a, b, c et d :

- $a(b + c) = ab + ac$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Démonstration.

- Le premier point a été démontré page 10.
- Pour prouver la deuxième égalité, on considère la figure suivante :



L'aire du grand rectangle est $(a + b)(c + d)$ alors que l'aire des quatre petits rectangles sont ac , ad , bc et bd . Là aussi, cela prouve bien que $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

□

Exemple 19.

1. $x(x + 2) = x^2 + 2x$
2. $(2x + 1)(x - 2) = 2x \times x + 2x \times (-2) + 1 \times x + 1 \times (-2) = 2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 3x - 2$

Exercice 26. Développer et réduire les expressions suivantes :

- $A(x) = (x + 1)(x - 3)$
 $B(x) = (x - 5)(7 - x)$
 $C(x) = (-x - 5)(x + 1)$
 $D(x) = (3 + x^2)(x + x^2)$
 $E(x) = (-3 - x^2)(-x - 1)$
 $F(x) = 3(x - 1)(x + 2)$
 $G(x) = -(2 + x)(x^2 + 1)$
 $H(x) = -2(7 + x)(x^2 - 1)$

III Factorisation d'une expression algébrique

Méthode – Factoriser une expression algébrique :

1. Identifier un facteur commun
2. Mettre le facteur commun devant la parenthèse
3. Compléter l'expression à l'intérieur de la parenthèse

Remarque. Il est préférable de toujours vérifier la factorisation en redéveloppant le résultat obtenu et vérifier que l'on retrouve bien le résultat initial.

Exemple 20.

1. $3x + 3y = 3(x + y)$
2. $5x + 5 = 5(x + 1)$
3. $x^2 + 3x = x(x + 3)$

Exercice 27. Factoriser au maximum les expressions algébriques suivantes :

- $A(x) = 3x + 3$
 $B(x) = 2x - 2$
 $C(x) = 4x - 2$

$$D(x) = x^2 + 3x$$

$$E(x) = x^2 - x$$

$$F(x) = 7x + 7x^2$$

$$G(x) = x - 5x^3$$

Exercice 28. Factoriser au maximum les expressions algébriques suivantes :

$$A(x) = 7x^2 - 5x^3$$

$$B(x) = 4x^3 + 4$$

$$C(x) = 4x^3 + 2x$$

$$D(x) = x^5 - x$$

$$E(x) = x^3 + x^2 + x$$

$$F(x) = 7 + 7x^2 + 7x^5$$

$$G(x) = -3x^7 + x^5 - 6x^2$$

IV Montrer que deux expressions algébriques sont égales

Méthode – Montrer l'égalité de deux expressions :

- Pour montrer que deux expressions A et B sont égales, on peut développer A et B et vérifier que les deux formes obtenues sont égales.
- Pour montrer que deux expressions A et B ne sont pas égales pour tout x, il suffit de trouver un nombre x particulier pour lequel l'égalité n'est pas vérifiée.

Exemple 21.

$$A(x) = 2(x^2 - 3x) \text{ et } B(x) = x(2x - 6).$$

Montrer que pour tout nombre x, $A(x) = B(x)$.

On développe les expressions A(x) et B(x) :

$$\begin{aligned} A(x) &= 2(x^2 - 3x) \\ &= 2x^2 - 2 \times 3x \\ &= 2x^2 - 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= x(2x - 6) \\ &= x \times 2x - 6x \\ &= 2x^2 - 6x \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que pour tout x, $A(x) = B(x)$.

Exercice 29. Pour chacune des expressions A et B, est-il vrai que, pour tout nombre x, $A(x) = B(x)$?

1. $A(x) = (x - 1)(x + 2)$ et $B(x) = x^2 + x - 2$
2. $A(x) = -x^2(-x + 1)$ et $B(x) = x(x^2 - x)$
3. $A(x) = -(x + 1)(x + 2)$ et $B(x) = -x^2 + 3x + 2$
4. $A(x) = x(x + 4) - 2$ et $B(x) = -2(1 + 2x) + x^2$
5. $A(x) = x(x + 4) + 2x$ et $B(x) = -x(-x - 6)$

Chapitre 4

Calcul littéral et identités remarquables

I Identités remarquables

Proposition 4.1 – Identités remarquables

Pour tous réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Démonstration.

Dans chaque cas, on utilise la double distributivité pour démontrer l'égalité souhaitée.

- Soient a et b deux réels :

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

- Soient a et b deux réels :

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\ &= a^2 - ab - ba + (-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

- Soient a et b deux réels :

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

□

Exemple 22. Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $(x+3)^2$
2. $(3x-4)^2$
3. $(2x+1)(2x-1)$

Solution :

1.

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(3x-4)^2 &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 \\ &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

3.

$$(2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$$

Exercice 30. Développer et simplifier les expressions suivantes.

$$A(x) = (x+5)^2$$

$$B(x) = (x+1)^2$$

$$C(x) = (x-2)^2$$

$$D(x) = (x-1)(x+1)$$

$$E(x) = (x-4)(x+4)$$

$$F(x) = (2x-1)^2$$

$$G(x) = (4x+5)^2$$

$$H(x) = (3x-2)(3x+2)$$

Exercice 31. Écrire l'expression sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{N}^*$.

a) $(1-\sqrt{2})^2$

b) $(7-\sqrt{5})^2$

c) $(2+3\sqrt{2})^2$

d) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

e) $\frac{4}{5-\sqrt{2}}$

f) $\frac{10}{1+\sqrt{11}}$

g) $\frac{3}{1-\sqrt{7}}$

h) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

II Développement d'une expression algébrique

On dispose désormais de deux outils pour développer une expression algébrique :

Méthode – Développer une expression algébrique

- Distribuer
- Utiliser une identité remarquable

Exercice 32. Développer et simplifier les expressions suivantes.

$$A(x) = (x-4)(-x+5)$$

$$B(x) = (x-4)^2$$

$$C(x) = (x+3)(x-3)$$

$$E(x) = (2x + 1)(x - 3) - 4x - 1$$

$$F(x) = (x - 3)^2 - x(x + 1)$$

$$G(x) = (2x + 3)^2 + 1$$

$$H(x) = (3x - 2)^2 - 3(x + 2)(4x - 3)$$

$$I(x) = (x + 5)(x - 5) - (x + 1)^2$$

III Factorisation d'une expression algébrique

On dispose également de deux outils pour factoriser une expression algébrique :

Méthode – Factoriser une expression algébrique

- Repérer un facteur commun
- Utiliser une identité remarquable

Exemple 23. Factoriser et simplifier les expressions suivantes :

1. $(x + 2)(3x + 1) + 2(x + 2)(x + 4)$

2. $x^2 + 2x + 1$

3. $x^2 - 6x + 9$

4. $x^2 - 4$

5. $9x^2 - 16$

Solution :

1.

$$\begin{aligned}(x + 2)(3x + 1) + 2(x + 2)(x + 4) &= (x + 2) \left((3x + 1) + 2(x + 4) \right) \\ &= (x + 2)(3x + 1 + 2x + 8) \\ &= (x + 2)(5x + 9)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 &= x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 \\ &= (x + 1)^2 \quad (\text{première identité remarquable avec } a = x \text{ et } b = 1)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 9 &= x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= (x - 3)^2 \quad (\text{deuxième identité remarquable avec } a = x \text{ et } b = 3)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}x^2 - 4 &= x^2 - 2^2 \\ &= (x + 2)(x - 2) \quad (\text{troisième identité remarquable avec } a = x \text{ et } b = 2)\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}9x^2 - 16 &= (3x)^2 - 4^2 \\ &= (3x + 4)(3x - 4) \quad (\text{troisième identité remarquable avec } a = 3x \text{ et } b = 4)\end{aligned}$$

Exercice 33.

Factoriser les expressions suivantes.

$$A(x) = x(x + 1) - 2x$$

$$B(x) = (2x + 3)(x - 7) + (2x + 3)(x + 1)$$

$$C(x) = -2(x + 1) + (x + 1)^2$$

$$D(x) = (x - 1)^2 - 16$$

$$E(x) = (x + 2)^2 - 9x^2$$

$$F(x) = 2(4x + 5)(3x + 7) + (3x + 7)(2x - 5)$$

$$G(x) = 49 - (x - 5)^2$$

$$H(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$I(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

$$J(x) = x^2 - x + x(x + 1)^2$$

$$K(x) = (x + 2)^2 - (2x + 4)(x + 3) + x^2 + 4x + 4.$$

Chapitre 5

Équations de degré supérieur

I Degré d'une équation

Définition 5.1

Le degré d'une équation correspond à la plus grande puissance de l'inconnue dans la forme développée.

Exemple 24.

- $x^5 + 4x^2 + x = 3x + 1$ est une équation de degré 5.
- $(x + 1)(x - 2) = 0$ est une équation de degré 2 car en développant, on voit que cette équation équivaut à $x^2 - x - 2 = 0$.

Exercice 34. Dans chaque cas, indiquer quel est le degré de l'équation.

- a) $x^2 + 3x - 5 = 2x$
- b) $x^6 - x^5 + 4 = 3x^2 + 5x$
- c) $x(x + 4) = x$
- d) $3x + 1 = 2x - 7$
- e) $x + 5x(x + 4) = x(x + 2)$
- f) $x(x + 1)(x - 5) = 0$

II Résolution d'équations de degré supérieur

Méthode – Résoudre une équation compliquée (fractions, degré deux...)

Étape 1 : Se ramener au cas où l'un des membres est égal à 0.

Étape 2 : Factoriser l'expression autant que possible (ou mettre la fraction au même dénominateur).

Étape 3 : Utiliser la règle du produit nul ou du quotient nul ci-dessous.

Proposition 5.2 – Produit nul

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Proposition 5.3 – Quotient nul

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0.$$

Exemple 25.

1. Résoudre l'équation $(2x + 1)(x + 3) = (2x + 1)(-2x + 2)$.

2. Résoudre l'équation $\frac{2x + 1}{x - 2} = 3$.

Solution :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (2x + 1)(x + 3) &= (2x + 1)(-2x + 2) \\ \iff (2x + 1)(x + 3) - (2x + 1)(-2x + 2) &= 0 \\ \iff (2x + 1)\left((x + 3) - (-2x + 2)\right) &= 0 \\ \iff (2x + 1)(x + 3 + 2x - 2) &= 0 \\ \iff (2x + 1)(3x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul :

$$\begin{array}{ll} 2x + 1 = 0 & \text{ou} \quad 3x + 1 = 0 \\ \iff 2x = -1 & \iff 3x = -1 \\ \iff x = -\frac{1}{2} & \iff x = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right\}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} - 3 \times \frac{x-2}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} - \frac{3(x-2)}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} - \frac{3x-6}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1-3x+6}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+7}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x+7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{7\}$.

Exercice 35. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(x+3)(x-8) = 0$
2. $(3x+7)(2+x) = 0$
3. $4(x+7)(2-x) = 0$
4. $(4x-7)(2x+3) = 3(4x-7)(5x+11)$
5. $x^2 + 2x = -1$
6. $x^2 = 6x - 9$
7. $(x-4)^2 - 9 = 0$
8. $(-x+1)^2 = 5$
9. $(x+7)^2 = (x+7)(3x+4)$
10. $(-x+2)^2 = -1$
11. $9x^2 - 1 = (3x-1)(2x+5)$

Exercice 36. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\frac{x+1}{2x-4} = 0$

2. $\frac{x+1}{x-3} = 4$

3. $\frac{4}{2x-5} = 3$

4. $\frac{x^2-9}{-x+3} = 0$

5. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = 0$

6. $\frac{2}{x} = \frac{-3}{x+1} + \frac{5}{x(x+1)}$