Limites et continuité
notes de cours d'Olivier Sester
2024–2025

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie I qui sera dans la plupart des cas un intervalle de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I. Généralités

On rappelle qu'une propriété portant sur une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est vraie au voisinage de a, ($a \in \overline{\mathbb{R}}$) si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert non vide centré en a si $a \in \mathbb{R}$, avec un intervalle de la forme $]c, +\infty[$ lorsque $a = +\infty$ avec un intervalle $]-\infty, c[$, lorsque $a = -\infty$.

Définition 1

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I. On dit que $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a si :
• cas où $a \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I},\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

• cas où $a = +\infty$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{I},\ x \geqslant \mathrm{A} \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

• cas où $a = -\infty$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{I},\ x \leqslant \mathrm{A} \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$,
En général, le domaine I est soit un intervalle avec a un élément de l'intérieur de I ou a est une des bornes de I; soit I est de la forme $]c, a[\cup]a, b[$.
Concernant la notation, pour bien souligner l'importance du domaine I dans la définition, on notera parfois cette limite $\lim\limits_{x \in \mathrm{I}, x \to a} f(x)$, même si par la suite on oubliera bien souvent le I lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguités.

Définition 2

On dit que $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si

$$\forall \mathrm{A} > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I},\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant \mathrm{A}.$$

Proposition 1

Si la limite (finie ou infinie) d'une fonction existe elle est unique.

On rappelle quelques limites "classiques" obtenues comme limite de taux d'accroissements et qu'il est impératif de connaitre :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Exercice 1. *Calculer les limites suivantes :*

$$(a)\lim_{x\to 0}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} \qquad (b)\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$$
$$(c)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \qquad (d)\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$$

Définition 3

Soient $f : \mathrm{I}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathrm{I}$. On dit que f est continue en a si et seulement si elle admet une limite quand x tend vers a.

Remarquons, et c'est fondamental, que si f admet une limite ℓ quand x tend vers a et que $a\in\mathrm{I}$ alors avec la définition de la limite que nous avons choisie nécéssairement $\ell=f(a)$. En effet, x peut tout à fait prendre la valeur a, et pour $x=a\in\mathbb{R}$ on a

$$|f(a)-\ell|\leqslant\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0,$$

d'où $\ell=f(a)$. Par conséquent, avec cette définition de la limite, dès que f est définie en a et y admet une limite ℓ celle-ci est égale à $f(a)$. La continuité de f en a peut également s'écrire

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x\in\mathrm{I},\ |x-a|\leqslant\eta\Longrightarrow|f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon.$$

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point a de I.

Attention : d'autres définitons de la limite sont possibles excluant $x=a$ (on prend $0<|x-a|$ dans la définition), l'existence de la limite en a n'est pas nécessairement synonyme de continuité au point a.

Limite à gauche et limite à droite

On appelle limite à droite en x_0 de f la limite, lorsqu'elle existe, de la fonction $f|_{]x_0,b[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x_0^+} f$ ou encore $\lim_{\substack{x>x_0\\ x\to x_0}} f(x)$.

On définit de même la limite à gauche en x_0 de f : la limite de la fonction $f|_{]a,x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x_0^-} f$ ou $\lim_{\substack{x<x_0\\ x\to x_0}} f(x)$

Proposition 2 – Opérations élémentaires sur les limites

Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell'\in\mathbb{R}$ alors :

- pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0}\lambda f(x)=\lambda\ell$
- $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=\ell+\ell'$
- $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\ell\cdot\ell'$
- si $\ell\neq 0$, $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f}(x)=\frac{1}{\ell}$

Théorème 3 – Caractérisation séquentielle de la limite

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que a soit adhérent à D et f une fonction réelle définie sur D. Alors f tend vers ℓ quand x tend vers a si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de D convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

Ce théorème est souvent utilisé pour montrer la discontinuité d'une fonction en a, il suffit de trouver une suite (x_n) qui converge vers a telle que $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

Exercice 2. *Montrer que la fonction indicatrice des rationnels $1_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point*

$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exercice 3. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & si\ x = \frac{p}{q},\ q \geqslant 1\ p\ et\ q\ premiers\ entre\ eux \end{cases}$$

Déterminer les points de continuité de f.

La notion de limite est une notion locale, par là on entend qu'elle ne dépend que des propriétés de la fonction f au voisinage du point a considéré. Ainsi, si g est la restiction de f à V, un voisinage de a, alors $\lim\limits_a f = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_a g = \ell$.

Théorème 4

- Si $f \leqslant g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$ alors $\ell \leqslant \ell'$.
- Si $f \leqslant g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$,
- Théorème des gendarmes : Si $f \leqslant g \leqslant h$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors g admet ℓ comme limite en x_0.

En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, la démonstration de ce théorème découle directement du théorème analogue pour les suites.
Prolongement par continuité Soient $a \in \mathbb{R}$ et $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction qui admet une limite λ quand x tend vers a. Il existe alors un unique prolongement de f à $[a, b[$ qui soit continue en a, il est obtenu en posant $\bar{f}(a) = \lambda$ et $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in]a, b[$. C'est le prolongement par continuité de f au point a.

Exercice 4. *Prolonger par continuité la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$. Le prolongement définit-il une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 5. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ ne peut pas être prolongée par continuité en 0.*

Théorème 5

Soit f une fonction réelle croissante définie sur un intervalle ouvert $\mathrm{I} =]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$.

- Si f est majorée, elle admet pour limite en b le réel $\sup_{\mathrm{I}} f$.
- Si f n'est pas majorée, on a $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$.

Exercice 6. *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \max(f(x), g(x))$. Montrer que h est continue.*

Exercice 7. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 t^{n-1} f(t)\,dt = f(1)$$

On pourra décomposer l'intégrale sur deux intervalles. Proposer plusieurs solutions.

II. Continuité Globale

Les quatre théorèmes qui suivent sont essentiels, ils constituent d'une certaine façon les fondements de l'analyse moderne.

Théorème 6 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application continue. Si $a, b \in \mathrm{I}$ alors f atteint toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Nous proposons ici une démonstration de ce résultat important qui repose sur le principe **de dichotomie** (mais ce n'est pas la seule preuve possible !).

Démonstration. On suppose par exemple que $f(a) < f(b)$ et on se donne δ tel que $f(a) < \delta < f(b)$. Définissons une nouvelle fonction continue $h = f - \delta$, il s'agit donc de trouver un c tel que $a < c < b$ et $h(c) = 0$.
Soit $a_1 = \frac{a+b}{2}$, on définit $\mathrm{I}_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ avec

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1 & \text{et} \quad \beta_1 = b \quad \text{si } h(a_1) \leqslant 0; \\ \alpha_1 = a & \text{et} \quad \beta_1 = a_1 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Par récurrence on construit ainsi une suite d'intervalles $\mathrm{I}_n = [\alpha_n, \beta_n]$, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$ et tels que $h(\alpha_n) \leqslant 0$ et $h(\beta_n) \geqslant 0$ en posant $a_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}$ et

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = a_{n+1} & \text{et} \quad \beta_{n+1} = \beta_n \quad \text{si } h(a_{n+1}) \leqslant 0; \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n & \text{et} \quad \beta_{n+1} = a_{n+1} \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite (α_n) est croissante, (β_n) est décroissante, et par construction $\lim_{n\to\infty} \alpha_n - \beta_n = 0$, elles sont donc adjacentes et par le théorème des suites adjacentes il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $c = \lim \alpha_n = \lim \beta_n$. Or h étant continue

$$\begin{cases} h(\alpha_n) \leqslant 0 & \text{donc} \quad \lim h(\alpha_n) = h(c) \leqslant 0 \\ h(\beta_n) \geqslant 0 & \text{donc} \quad \lim h(\beta_n) = h(c) \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi, $h(c) = 0$ c'est-à-dire $f(c) = \delta$. □

Exercice 8. *Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue de $[a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.*

Exercice 9. *Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par*

$$f(0)=0 \text{ et } f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'est pas continue en 0 mais vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 10. *Soit $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to a_+} f(x)=\lim_{x\to b_-} f(x)$. Montrer que f n'est pas injective.*

Théorème 7

Soient $a\leqslant b$ des réels et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$

Proposition 8

Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. L'espace $\mathscr{C}(\mathrm{I})$ des applications continues sur I muni de la norme $\|f\|_\infty=\max_{\mathrm{I}}|f|$ est un espace vectoriel normé complet.

Exercice 11. *Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Montrer que f est majorée et atteint sa borne supérieure.*

Théorème 9

L'image par une fonction réelle continue d'un intervalle est un intervalle.

Théorème 10 – Bijection réciproque

Soit $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors, si $\mathrm{J}=f(\mathrm{I})$:

- f est une bijection de I sur J.
- $f^{-1}:\mathrm{J}\to\mathrm{I}$ est continue et strictement monotone de même sens que f.

Le graphe de f^{-1} est le symétrique par rapport à la première bissectrice $\Delta=\{y=x\}$ du graphe de f.

Définition 4

Un fonction $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ est dite uniformément continue si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0, \forall(x,y)\in\mathrm{I}^2,\ |x-y|\leqslant\eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon.$$

Théorème 11 – Heine

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.

Il s'agit bien d'un résultat de compacité car les intervalles fermés bornés sont des ensembles compacts de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $\varepsilon>0$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x\in[a,b]$, par continuité de f en x, il existe un réel $\eta_x>0$ tel que

$$\text{si } |x-y|\leqslant\eta_x \text{ alors } |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon.$$

$\bigcup_{x\in[a,b]}]x-\frac{\eta_x}{2}, x+\frac{\eta_x}{2}[$ est un recouvrement du compact $[a,b]$ par des intervalles ouverts. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini :

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n}]x_i - \frac{\eta_{x_i}}{2}, x_i + \frac{\eta_{x_i}}{2}[.$$

Posons $\eta = \inf_{i=1..n} \frac{\eta_{x_i}}{2}$, alors f vérifie la propriété d'uniforme continuité pour cette valeur de η. En effet, pour tout $\alpha, \beta \in [a,b]$ tels que $|\alpha-\beta| \leqslant \eta$, il existe un x_{i_0} avec $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ vérifiant $|\alpha - x_{i_0}| \leqslant \frac{\eta_{x_{i_0}}}{2}$ d'où

$$|\beta - x_{i_0}| \leqslant |\beta-\alpha| + |\alpha - x_{i_0}| \leqslant 2\frac{\eta_{x_{i_0}}}{2} = \eta_{x_{i_0}}.$$

Finalement, d'après la continuité de f en x_{i_0} $|f(\alpha) - f(x_{i_0})| \leqslant \varepsilon$ et $|f(\beta) - f(x_{i_0})| \leqslant \varepsilon$ on en déduit $|f(\alpha) - f(\beta)| \leqslant 2\varepsilon$. □

Exercice 12. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existent. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

La notion de continuité uniforme est fondamentale lorsque l'on cherche à établir des théorèmes d'approximation des fonctions continues par certaines classes de fonctions. Ainsi dans le cadre de la théorie de l'intégration on se sert très souvent du résultat suivant

Exercice 13. *Montrer que toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions constantes par morceaux.*

Plus généralement, on peut montrer (c'est un bon exercice) le célèbre théorème de Weierstrass : les fonctions polynômes sont denses dans l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ pour la norme uniforme. Autrement dit :

Théorème 12 – Weierstrass

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - P(t)| \leqslant \varepsilon$.

Un autre intérêt de la notion d'uniforme continuité est qu'elle permet de prolonger les fonctions continues à l'adhérence de leur domaine définition.

Exercice 14. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$, une fonction uniformément continue. Montrer que $\lim_{x\to b} f(x)$ existe.*

III. Suites récurrentes

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que I est stable par f si $f(I) \subset I$. Dans cette situation, les suites récurrentes associées à f sont bien définies par

$$u_0 \in I \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Attention sans l'existence de cet intervalle stable I, on peut avoir des problèmes de définition de la suite récurrente. Par exemple, vérifier que les suites $u_{n+1} = \ln(u_n)$ ne sont bien définies pour aucun $u_0 > 0$.

Théorème 13

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ une fonction continue, $u_0 \in \mathrm{I}$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) est convergente vers un réel ℓ alors ℓ est un point fixe de f

$$f(\ell) = \ell.$$

Bien sur ce théorème ne donne pas la convergence de la suite (u_n), il faut établir cette convergence au préalable. Mais en cas de convergence la limite est à chercher parmi les solutions de $f(x) = x$.

Proposition 14

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ une fonction continue et croissante, alors les suites récurrentes sont monotones :
- si $u_0 \leqslant u_1$ la suite (u_n) est croissante
- si $u_0 \geqslant u_1$ la suite (u_n) est décroissante.

En particulier lorsque I est borné, sous les hypothèses ci-dessus la suite (u_n) sera donc monotone et bornée donc convergente.

Lorsque $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ est décroissante et continue, $f \circ f$ est croissante et on peut se ramener au cas ci-dessus en considérante les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui sont des suites récurrentes associées à $f \circ f$ et donc monotones.

Exemple 1. *Étudier les suites récurrentes (u_n) définie par*

- $u_0 = 1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
- $u_0 \geqslant 1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.
- $u_0 \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.

Une fonction f est dite k-lipschitzienne si pour tout $x, y \in \mathrm{I}$, $\quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

Théorème 15 – Point Fixe

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $0 \leqslant k < 1$ alors f a un unique point fixe dans I et pour tout $u_0 \in \mathrm{I}$ la suite récurrente définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers cet unique point fixe de f.

IV. Exercices Complémentaires

Exercice 15.

1. *Déterminer toutes les fonctions continues en 0,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. *De même, déterminer toutes les fonctions continues en 0,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Exercice 16. *Soit* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue ayant une limite finie en* $+\infty$.

1. *Montrer que* f *est bornée.*

2. *Montrer que f admet un maximum ou un minimum absolu, mais pas nécessairement les deux.*
3. *Montrer que f est uniformément continue.*

Exercice 17. *Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ déterminer les limites*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 18. *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $p, q \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que*

$$p\cdot f(a) + q\cdot f(b) = (p+q)\cdot f(c)$$

Exercice 19. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.*
Montrer que pour tout entier n non nul il existe $c_n \in [0, \frac{1}{n}]$ tel que :

$$f(c_n) = f(c_n + \frac{1}{n}).$$

Indication : On pourra considérer la fonction $f_n : [0, 1-\frac{1}{n}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$$

et exprimer $f(1) - f(0)$ en fonction de f_n.

Exercice 20. *Soient $k > 0$, $k \neq 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(kx) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si f est continue en 0 alors f est constante.*

Exercice 21. *Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x+1) - f(x) = l.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

Exercice 22. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue.*
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in [0,1]$ tel que $f(a_n) = a_n^n$.
b) On suppose f strictement décroissante; montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est unique. Etudier la suite (a_n).

Exercice 23. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive et* $\mathrm{M} = \sup f(x)$. *Montrer que*

$$\lim_{n\to +\infty}\left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{1/n} = \mathrm{M}.$$

On pourra encadrer la suite ci-dessus par 2 suites de la forme $\mathrm{M}\cdot\mathrm{C}^{1/n}$, *où* C *est une constante positive.*

Exercice 24. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que* $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ *existe. Montrer que si $f(0) \geqslant 0$, alors f a un point fixe.*

Exercice 25. *Soient f et g deux fonctions continues de* $[0,1]$ *dans* $[0,1]$.
a) Montrer que f admet un point fixe.
b) On suppose en outre f monotone et $f\circ g = g\circ f$. Montrer que $f-g$ s'annule.

Exercice 26. *Soit $f:\mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que pour tout $x>0$,*

$$\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exercice 27. *Étudier la suite (u_n) définie par :*

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}.$$

Exercice 28. *Soit (a_n) la suite définie par récurrence :*

$$a_0 \in]0,\pi/2[, \text{ et } a_{n+1} = \sin(a_n).$$

1. *Montrer que (a_n) converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*
2. *Déterminer un équivalent de la suite a_n.*

Exercice 29. *Soit $a>0$ et (u_n) la suite définie par $u_0>0$ et*

$$\forall n\geqslant 0,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

a) Étudier la convergence de la suite (u_n).
b) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}}$$

Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de v_0 et de n.
c) Montrer que, si $u_0>\sqrt{a}$, on a

$$|u_n-\sqrt{a}| \leqslant 2u_0 v_0^{2^n}$$