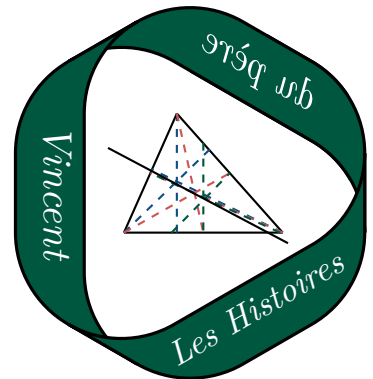




Intégration
Licence 3
Yannick VINCENT
Université de
Montpellier

www.yannickvincent.fr

Table des matières

1	Intégrale de Riemann	4
1	Fonctions en escaliers	4
2	Fonctions réglées	5
3	Fonctions Riemann-intégrables	6
4	Sommes de Riemann	9
2	Mesure de Lebesgue	12
1	Pavés et volumes des pavés	12
2	Mesure extérieure	14
3	Ensembles Lebesgue-mesurables et mesure de Lebesgue	16
4	Exemple d'un ensemble non Lebesgue-mesurable	20
3	Théorie générale de la mesure	22
1	Tribus, algèbres, classes monotones et systèmes fondamentaux	22
2	Espaces mesurables et fonctions mesurables	24
3	Espaces mesurés	26
4	Construction de mesures	27
5	Mesures boréliennes	28
4	Intégrale de Lebesgue	31
1	Intégration des fonctions étagées	31
2	Intégration des fonctions mesurables à valeurs dans $[0; +\infty]$	33
3	Fonctions intégrables à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	38
4	Théorème de convergence dominée	41
5	Théorème de continuité et de dérivabilité	42
6	Théorème de transfert	44
5	Espaces mesurés produits et intégration	46
1	Tribu produit	46
2	Applications mesurables sur un espace mesuré produit	47
3	Mesure produit	48
4	Théorèmes de Tonelli et Fubini	50
6	Intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue	52
1	Distinction entre $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et conséquences	52
2	Lien entre intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue	53
3	Théorème de changement de variables	55

Annexes	58
1 Mesure extérieure et application aux espaces produits	58
2 Théorème de Radon-Nikodym	61

Chapitre 1

Intégrale de Riemann

Dans tout ce chapitre, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ désigne un intervalle et E un espace de Banach.

1 Fonctions en escaliers

Définition 1.1

- Une fonction $\varphi : [a, b] \longrightarrow E$ est dite « en escalier » s'il existe une subdivision $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ de $[a, b]$ telle que φ soit constante sur chaque intervalle ouvert $] \alpha_i; \alpha_{i+1}[$.
On note $\mathcal{E}([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions en escalier.
- L'intégrale de φ sur $[a, b]$ est définie par

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) c_i$$

où c_i est la valeur prise par φ sur $] \alpha_i; \alpha_{i+1}[$.

Proposition 1.1 – Inégalité triangulaire

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], E)$. L'application $\|\varphi\|_E : t \longmapsto \|\varphi(t)\|_E$ appartient à $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et

$$\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\|_E \leq \int_a^b \|\varphi(t)\|_E dt.$$

Démonstration.

$$\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\|_E = \left\| \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) c_i \right\|_E \leq \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \|c_i\|_E = \int_a^b \|\varphi(t)\|_E dt.$$

□

Proposition 1.2

L'application $\mathcal{J} : \begin{cases} \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) & \longrightarrow E \\ \varphi & \longmapsto \int_a^b \varphi(t) dt \end{cases}$ est linéaire et continue et vérifie

$$\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\|_E \leq (b-a) \|\varphi\|_\infty.$$

Démonstration.

$$\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\|_E \leq \int_a^b \|\varphi(t)\| dt = \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \|c_i\|_E \leq \|\varphi\|_\infty \times \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) = \|\varphi\|_\infty (b-a).$$

□

2 Fonctions réglées

Définition 1.2

On note $\mathcal{R}eg([a; b], E)$ l'adhérence de $\mathcal{E}([a; b]; E)$ dans $\mathcal{F}([a, b], E)$ pour la topologie définie par la semi norme $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition 1.3

Une fonction réglée sur $[a; b]$ est bornée sur $[a; b]$ et l'ensemble $\mathcal{R}eg([a; b], E)$ est l'adhérence de $\mathcal{E}([a; b]; E)$ dans $\mathcal{B}([a; b], E)$ pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$. C'est donc un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}([a; b], E)$.

Définition 1.3

On note $\mathcal{J}_{Reg}$ l'unique prolongement continu à $\mathcal{R}eg([a; b], E)$ de l'application linéaire continue $\mathcal{J}$. De plus, si $f \in \mathcal{R}eg([a; b], E)$, on note

$$\int_a^b f(t) dt = \mathcal{J}_{Reg}(f).$$

Proposition 1.4

Une fonction $f : [a; b] \rightarrow E$ est réglée si, et seulement si, elle admet une limite à droite et à gauche en tout point.

Démonstration.

- Soit f une fonction réglée et $x_0 \in [a, b[$. Soit $\epsilon > 0$.
On veut montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in]x_0; x_0 + \eta[$,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \epsilon.$$

Il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], E)$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \epsilon$. On considère η tel que φ est constante sur $]x_0; x_0 + \eta[$.

Ainsi, pour tous $x, y \in]x_0; x_0 + \eta[$,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|f(y) - \varphi(y)\| + \|\varphi(y) - \varphi(x)\| + \|\varphi(x) - f(x)\| \leq 2\epsilon.$$

- Soit $f : [a; b] \rightarrow E$ une fonction admettant des limites à gauche et à droite en tout point. Soit $\epsilon > 0$.
Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\eta_x > 0$ tel que

$$\forall y, z \in]x, x + \eta_x[\cap [a, b], \|f(y) - f(z)\| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \forall y, z \in]x - \eta_x, x[\cap [a, b], \|f(y) - f(z)\| \leq \epsilon.$$

La famille $(]x - \eta_x; x + \eta_x[\cap [a, b])$ forme un recouvrement de $[a, b]$.

On considère $\eta > 0$ un nombre de Lebesgue associé à ce recouvrement, c'est-à-dire tel que tout intervalle de longueur inférieure à η soit contenue dans un $]x - \eta_x; x + \eta_x[\cap [a, b]$.

On considère ensuite une subdivision $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ de $[a; b]$ de pas inférieur à η et $x_i \in]\alpha_i; \alpha_{i+1}[$.

On considère enfin φ , la fonction en escalier valant une valeur prise par f sur chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ et $]x_i; \alpha_{i+1}[$.

□

Proposition 1.5

- Les fonctions continues de $[a; b]$ dans E sont réglées.
- Les fonctions monotones de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ sont réglées.

Démonstration. Si f est monotone,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t < t_0}} f(t) = \sup_{t \in [a, t_0[} f(t).$$

□

Proposition 1.6

L'ensemble des points de discontinuités d'une fonction réglée sur $[a, b]$ est dénombrable.

Démonstration. Soit $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$.

On note C_n l'ensemble (fini) des points de discontinuités de φ_n et $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

f est continu sur $[a; b] \setminus C$.

□

3 Fonctions Riemann-intégrables

Définition 1.4

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$. On pose

$$\mathcal{M}(f) = \left\{ \mu \in \mathcal{E}([a, b], E) \mid \forall t \in [a; b], \|f(t)\| \leq \mu(t) \right\}$$

et l'application $P_E : \mathcal{F}([a; b], E) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par

$$P_E(f) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \left\{ \int_a^b \mu(t) dt \right\}.$$

Remarque. Si $f \in \mathcal{E}([a, b], E)$, $P_E(f) = \int_a^b \|f(t)\| dt$.

Proposition 1.7

L'application P_E est une semi-norme sur $\mathcal{F}([a; b], E)$.

Démonstration. Soient $f, g : [a; b] \longrightarrow E$ telle que $P_E(f)$ et $P_E(g)$ soient finis. Soit $\epsilon > 0$. Il existe μ_1 et μ_2 fonctions en escaliers telles que

$$\int_a^b \mu_1(t) dt \leq P_E(f) + \epsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu_2(t) dt \leq P_E(g) + \epsilon.$$

Pour tout $t \in [a; b]$, $\|f(t) + g(t)\| \leq \|f(t)\| + \|g(t)\| \leq \mu_1(t) + \mu_2(t)$, donc $\mu_1 + \mu_2 \in \mathcal{M}(f + g)$. De plus,

$$\int_a^b (\mu_1 + \mu_2)(t) dt \leq P_E(f) + P_E(g) + 2\epsilon.$$

Donc

$$P_E(f + g) \leq P_E(f) + P_E(g) + 2\epsilon.$$

□

Définition 1.5

On note $\mathcal{RI}([a; b], E)$ l'adhérence de $\mathcal{E}([a; b], E)$ dans $\mathcal{F}([a; b], E)$ pour la topologie définie par la semi-norme P_E .

Proposition 1.8

Une fonction $f : [a; b] \longrightarrow E$ appartient à $\mathcal{RI}([a; b], E)$ si, et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], E)$ et $\mu \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in [a, b], \|f(t) - \varphi(t)\| \leq \mu(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(t) dt \leq \epsilon.$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{RI}([a; b], E)$ et soit $\epsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], E)$ telle que $P_E(f - \varphi) \leq \epsilon$.

Par définition de P_E , il existe $\mu \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in [a, b], \|f(t) - \varphi(t)\| \leq \mu(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(t) dt \leq P_E(f - \varphi) + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

— Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], E)$ et $\mu \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in [a, b], \|f(t) - \varphi(t)\| \leq \mu(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(t) dt \leq \epsilon.$$

Cela signifie que $\mu \in \mathcal{M}(f - \varphi)$ et que $P_E(f - \varphi) \leq \epsilon$.

On en déduit que $f \in \mathcal{RI}([a; b], E)$.

□

Corollaire 1.9

Toute fonction $f \in \mathcal{RI}([a; b], E)$ est bornée sur $[a; b]$.

Démonstration. Pour $\epsilon = 1$, il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], E)$ et $\mu \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in [a, b], \|f(t) - \varphi(t)\| \leq \mu(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(t) dt \leq 1.$$

Ainsi, pour tout $t \in [a; b]$,

$$\|f(t)\| \leq \|\varphi(t)\|_E + \|f(t) - \varphi(t)\|_E \leq \|\varphi(t)\|_E + \mu(t).$$

□

Proposition 1.10

$$\mathcal{R}eg([a; b], E) \subset \mathcal{RI}([a; b], E)$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{R}eg([a; b], E)$. Soit $\epsilon > 0$.

Il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], E)$ telle que $\|f - \varphi\| \leq \epsilon$.

On pose $\mu(t) = \frac{\epsilon}{b-a}$ pour tout $t \in [a, b]$.

Ainsi, $\int_a^b \mu(t) dt < \epsilon$ et $\|f(t) - \varphi(t)\| \leq \mu(t)$.

□

Exemple. La fonction

$$f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable mais n'est pas une fonction réglée sur $[0, 1]$ (à démontrer).

Proposition 1.11

L'application $\mathcal{J} : \begin{cases} \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R}) & \longrightarrow & E \\ \varphi & \longmapsto & \int_a^b \varphi(t) dt \end{cases}$ est linéaire et continue et vérifie

$$\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\|_E \leq P_E(\varphi).$$

Définition 1.6

On note $\mathcal{Int}$ l'unique prolongement continu à $\mathcal{RI}([a; b], E)$ de l'application linéaire continue $\mathcal{J}$. De plus, si $f \in \mathcal{RI}([a; b], E)$, on note

$$\int_a^b f(t) dt = \mathcal{Int}(f).$$

Proposition 1.12

Pour tout $f \in \mathcal{RI}([a; b], E)$, $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\|_E \leq P_E(f)$.

Proposition 1.13 – Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathcal{RI}([a; b], E)$. Alors la fonction $t \mapsto \|f(t)\|_E$ appartient à $\mathcal{RI}([a; b], \mathbb{R})$ et $\int_a^b \|f(t)\|_E dt = P_E(f)$.
Par conséquent,

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\|_E \leq \int_a^b \|f(t)\|_E dt \leq (b-a) \|f\|_\infty.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{RI}([a; b], E)$. Pour tout $n \geq 1$, il existe φ_n et μ_n des fonctions en escaliers telles que $\forall t \in [a, b], \|f(t) - \varphi_n(t)\| \leq \mu_n(t)$ et $\int_a^b \mu_n(t) dt \leq \frac{1}{n}$.

Alors

$$\left| \|f(t)\| - \|\varphi_n(t)\| \right| \leq \|f(t) - \varphi_n(t)\| \leq \mu_n(t)$$

Donc $P_{\mathbb{R}}(\|f\| - \|\varphi_n\|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on a donc $\|f\| \in \mathcal{RI}([a; b], \mathbb{R})$.

Enfin, par définition de l'intégrale de Riemann, on a

$$\int_a^b \|f(t)\| dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \|\varphi_n(t)\| dt = P_E(f).$$

□

4 Sommes de Riemann**Définition 1.7**

- On appelle subdivision pointée d'ordre m de $[a, b]$ tout élément $((\alpha_0, \dots, \alpha_m), (x_0, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$ tel que $\alpha_0 = a < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = b$ et tel que $x_i \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ ($\forall i \in \{0, \dots, m\}$).
- On note $S_P(m)$ l'ensemble des subdivisions pointées d'ordre m de $[a, b]$. On note $S_P = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} S_P(m)$ l'ensemble des subdivisions pointées de $[a, b]$.
- Les éléments de S_P seront notés $\Delta = (\alpha, x)$.

Définition 1.8

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction et $\Delta(\alpha, x) \in S_P(m)$ une subdivision pointée. On appelle somme de Riemann associée à Δ et f l'élément

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(x_i).$$

Lemme 1.14

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], E)$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision pointée $\Delta = (\alpha, x)$:

$$\max_{0 \leq i \leq m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \eta \implies \left\| \int_a^b \varphi(t) dt - S_\Delta(\varphi) \right\|_E \leq \epsilon.$$

Démonstration. On suppose que $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ est une subdivision adaptée à φ . Soit $\Delta = (\alpha, x)$ une subdivision pointée.

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_a^b \varphi(t) dt - S_\Delta(\varphi) \right\|_E &= \left\| \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \varphi(t) dt - \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \varphi(x_i) \right\|_E \\
 &= \left\| \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (\varphi(t) - \varphi(x_i)) dt \right\|_E \\
 &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \|(\varphi(t) - \varphi(x_i))\|_E dt \\
 &\leq 2 \text{Card}(K) \|\varphi\|_\infty \times \max_{0 \leq i \leq m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)
 \end{aligned}$$

où K est l'ensemble des intervalles $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ qui contiennent au moins un β_j . $\square$

Proposition 1.15

Soit $f \in \mathcal{RI}([a, b], E)$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision pointée $\Delta = (\alpha, x)$:

$$\max_{0 \leq i \leq m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \eta \implies \left\| \int_a^b f(t) dt - S_\Delta(f) \right\|_E \leq \epsilon.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{RI}([a, b], E)$. Soit $\epsilon > 0$.

Il existe φ, μ des fonctions en escaliers telles que $\|f(t) - \varphi(t)\|_E \leq \mu(t)$ et $\int_a^b \mu(t) dt \leq \epsilon$.

Il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $\Delta = (\alpha, x)$ de pas inférieur à η , on ait

$$\left\| \int_a^b \varphi(t) dt - S_\Delta(\varphi) \right\|_E \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b \mu(t) dt - S_\Delta(\mu) \right| \leq \epsilon.$$

En particulier, on remarque que l'on a $|S_\Delta(\mu)| \leq 2\epsilon$. $\square$

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_a^b f(t) dt - S_\Delta(f) \right\|_E &= \left\| \int_a^b f(t) - \varphi(t) dt + \int_a^b \varphi(t) dt - S_\Delta(f) \right\|_E \\
 &\leq \int_a^b \|f(t) - \varphi(t)\|_E dt + \left\| \int_a^b \varphi(t) dt - S_\Delta(\varphi) \right\|_E + \|S_\Delta(\varphi) - S_\Delta(f)\|_E \\
 &\leq 2\epsilon + \|S_\Delta(\varphi) - S_\Delta(f)\|_E
 \end{aligned}$$

Or,

$$\|S_\Delta(\varphi) - S_\Delta(f)\|_E = \left\| \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) (\varphi(x_i) - f(x_i)) \right\|_E \leq \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \mu(x_i) \leq 2\epsilon.$$

Corollaire 1.16

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f' \in \mathcal{RI}([a, b], \mathbb{R})$. Alors

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\Delta = (\alpha, x)$ est une subdivision pointée de pas inférieur à η , alors $\left| \int_a^b f'(t)dt - S_\Delta(f') \right| \leq \epsilon$.

Soit α une subdivision de pas inférieur à η .

On applique le théorème des accroissements finis à f sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$: il existe $\theta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i) = (\alpha_{i+1} - \alpha_i)f'(\theta_i)$.

Ainsi, $S_{(\alpha, \theta)}(f') = \sum_{i=0}^{m-1} f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i) = f(b) - f(a)$.

Proposition 1.17

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et soit $f : [a, b] \rightarrow E$.

On suppose qu'il existe $I \in E$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée $\Delta = (\alpha, x)$,

$$\max_{0 \leq i \leq m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \eta \implies \|I - S_\Delta(f)\|_E \leq \epsilon.$$

Alors $f \in \mathcal{RI}([a, b], E)$ et $\int_a^b f(t)dt = I$.

Il suffit de prouver la proposition dans le cas de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe η tel que pour toute subdivision pointée $\Delta = (\alpha, x)$, $\max_{0 \leq i \leq m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \eta \implies \|I - S_\Delta(f)\|_E \leq \epsilon$.

On remarque que f est nécessairement bornée :

En effet, avec une subdivision $\Delta = ((\alpha_0, \dots, \alpha_m), (\alpha_0, \dots, t, \dots, \alpha_m))$ où $t \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, on a :

$$\left| I - (\alpha_{i+1} - \alpha_i)f(t) - \sum_{k \neq i} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)f(\alpha_k) \right| \leq \epsilon$$

Donc

$$(\alpha_{i+1} - \alpha_i)|f(t)| \leq \epsilon + |I| + \sum_{k \neq i} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)|f(\alpha_k)|$$

Soit $m_i = \inf_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}]} f$ et $M_i = \sup_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}]} f$.

En notant $S^-(\alpha, f) = \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)m_i$ et $S^+(\alpha, f) = \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)M_i$, on montre que

$$|S^+(\alpha, f) - S^-(\alpha, f)| \leq 4\epsilon.$$

Soit φ une fonction en escaliers égale à m_i sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ et μ égale à $M_i - m_i$ sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.

$$\begin{aligned} \int_a^b \mu(t)dt &= \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)(M_i - m_i) \\ &= S^+(\alpha, f) - S^-(\alpha, f) \\ &\leq 4\epsilon \end{aligned}$$

Chapitre 2

Mesure de Lebesgue

Remarque. Point de départ : la notion de volume

Pour construire une théorie de l'intégration plus puissante que celle de Riemann, nous devons d'abord généraliser la notion de « volume » à des ensembles beaucoup plus complexes que de simples intervalles ou pavés. La stratégie est la suivante :

1. On part des objets les plus simples pour lesquels le volume est évident : les **pavés**. Le volume d'un pavé $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ est intuitivement $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.
2. On utilise ces pavés comme des « briques élémentaires » pour approximer le volume d'ensembles plus compliqués.

La proposition qui montre que tout ouvert peut être décomposé en une union dénombrable de cubes est la première pierre de cet édifice. Elle nous assure que notre approche est déjà assez puissante pour décrire des ensembles topologiquement fondamentaux.

1 Pavés et volumes des pavés

Définition 2.1

- Un pavé fermé est un produit cartésien de n segments de $\mathbb{R}$:

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad \text{où } a_i \leq b_i.$$

- Un pavé ouvert est un produit cartésien de n intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$:

$$P =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[\quad \text{où } a_i \leq b_i.$$

- Un cube (ouvert ou fermé) est un pavé tel que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $b_i - a_i = b_j - a_j$.

Définition 2.2

Une union de pavé est dite quasi disjointe lorsque les intérieurs des pavés sont deux à deux disjoints.

Définition 2.3

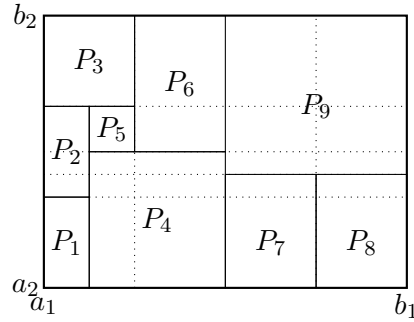
Le volume d'un pavé (ouvert ou fermé) est :

$$|P| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

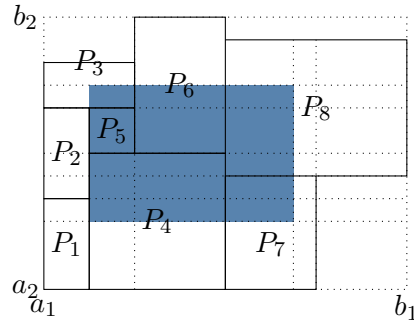
Lemme 2.1

Si un pavé P est une réunion finie quasi disjointe de pavés, $P = \bigcup_{i=1}^N P_i$, alors

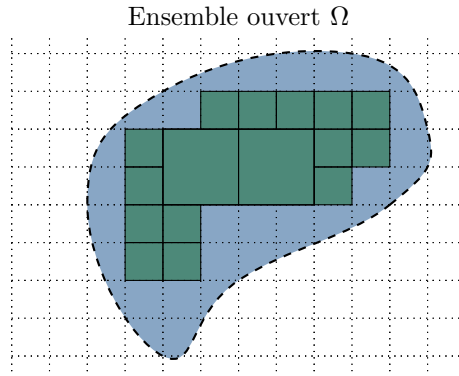
$$|P| = \sum_{i=1}^N |P_i|.$$

**Lemme 2.2**

Soient $P, P_1, \dots, P_N$ des pavés tels que $P \subset \bigcup_{i=1}^N P_i$, alors $|P| \leq \sum_{i=1}^N |P_i|$.

**Proposition 2.3**

Tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme réunion dénombrable de cubes (fermés) quasi disjoints.



2 Mesure extérieure

Définition 2.4

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On appelle mesure extérieure de E le réel :

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} |C_i| \quad \text{tel que } \forall i \geq 1, C_i \text{ est un cube fermé et } E \subset \bigcup_{i \geq 1} C_i \right\}.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement dénombrable de E par des cubes fermés ($E \subset \bigcup_{i \geq 1} C_i$) tel que

$$\sum_{i \geq 1} |C_i| \leq \lambda^*(E) + \epsilon.$$

Remarque. Si $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^*(\{x\}) = 0$.

Proposition 2.4

Si C est un cube fermé, alors $\lambda^*(C) = |C|$.

Démonstration. Soit $(C_i)_{i \geq 1}$ un recouvrement dénombrable de C par des cubes fermés. On veut montrer que

$$|C| \leq \sum_{i \geq 1} |C_i|.$$

Soit S_i un cube ouvert tel que $C_i \subset S_i$ et tel que $|S_i| \leq (1 + \epsilon)|C_i|$.

On extrait alors un sous-recouvrement fini $(S_i)_{1 \leq i \leq N}$ de C .

$$|C| \leq \sum_{i=1}^N |S_i| \leq (1 + \epsilon) \sum_{i=1}^N |C_i| \leq (1 + \epsilon) \sum_{i \geq 1} |C_i|.$$

□

Proposition 2.5 – Monotonie

Si $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}^n$, alors $\lambda^*(E_1) \leq \lambda^*(E_2)$.

- $\lambda^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$.
- Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est bornée, $\lambda^*(E) < +\infty$.

Proposition 2.6

Si C est un cube ouvert, alors $\lambda^*(C) = |C|$.

Démonstration. L'inégalité $\lambda^*(C) \leq |\overline{C}| = |C|$ est claire.

Soit $\tilde{C} \subset C$ un cube fermé. On a $\lambda^*(\tilde{C}) \leq \lambda^*(C)$.

Donc $|\tilde{C}| \leq \lambda^*(C)$.

Donc $|C| \leq \lambda^*(C)$. □

Proposition 2.7 – Sous additivité dénombrable

Si $E = \bigcup_{i \geq 1} E_i$, alors $\lambda^*(E) \leq \sum_{i \geq 1} \lambda^*(E_i)$.

Démonstration. Soit $E = \bigcup_{i \geq 1} E_i$.

Pour tout $i \geq 1$, $E_i \subset \bigcup_{k \geq 1} C_{i,k}$ tel que

$$\sum_{k \geq 1} |C_{i,k}| \leq \lambda^*(E_i) + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Alors, comme $E \subset \bigcup_{i \geq 1, k \geq 1} C_{i,k}$,

$$\lambda^*(E) \leq \sum_{i \geq 1, k \geq 1} |C_{i,k}| \leq \sum_{i \geq 1} \lambda^*(E_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \leq \sum_{i \geq 1} \lambda^*(E_i) + \epsilon.$$

□

Proposition 2.8 – Semi-régularité

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Alors $\lambda^*(E) = \inf\{\lambda^*(O), O \text{ ouvert tel que } E \subset O\}$.

Démonstration. Il est clair que $\lambda^*(E) \leq \inf\{\lambda^*(O), O \text{ ouvert tel que } E \subset O\}$.

On va montrer que si $E \subset \bigcup_{i \geq 1} C_i$, $\inf\{\lambda^*(O), O \text{ ouvert tel que } E \subset O\} \leq \sum_{i \geq 1} |C_i|$.

Soit $E \subset \bigcup_{i \geq 1} C_i$ un recouvrement dénombrable de E par des cubes fermés.

Soit $\epsilon > 0$, on cherche un ouvert O tel que $E \subset O$ et tel que $\lambda^*(O) \leq \sum_{i \geq 1} |C_i| + \epsilon$.

Il suffit de prendre $O = \bigcup_{i \geq 1} D_i$ où D_i est un cube ouvert contenant C_i et tel que $|D_i| \leq |C_i| + \frac{\epsilon}{2^i}$.

$$\lambda^*(O) \leq \sum_{i \geq 1} |D_i| \leq \sum_{i \geq 1} |C_i| + \epsilon.$$

□

On aimerait avoir une propriété telle que si E_1 et E_2 sont deux ensembles disjoints,

$$\lambda^*(E_1 \cup E_2) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2).$$

Cette propriété est fausse en générale.

Lemme 2.9

Soient $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ tels que $d(E_1, E_2) > 0$. Alors,

$$\lambda^*(E_1 \cup E_2) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2).$$

Démonstration. On veut montrer que $\lambda^*(E_1 \cup E_2) \geq \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$.

Soit $E_1 \cup E_2 \subset \bigcup_{i \geq 1} C_i$. Quitte à subdiviser les C_i , on peut supposer qu'ils sont tous de diamètre strictement inférieurs à $d(E_1, E_2)$. Ainsi, chaque C_i n'intersecte qu'au plus un des deux E_i . Finalement,

$$\sum_{i \geq 1} |C_i| = \sum_{i \in J_1} |C_i| + \sum_{i \in J_2} |C_i| \geq \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2).$$

□

Lemme 2.10

Si $E = \bigcup_{i \geq 1} C_i$ est une réunion dénombrable de cubes quasi-disjoints, alors

$$\lambda^*(E) = \sum_{i \geq 1} |C_i|.$$

Démonstration. Soit $E = \bigcup_{i \geq 1} C_i$.

Pour tout $i \geq 1$, on note $\tilde{C}_i$ un cube contenu strictement dans C_i et tel que $|\tilde{C}_i| \geq |C_i| + \frac{\epsilon}{2^i}$.

Ainsi, $\lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^N \tilde{C}_i\right) = \sum_{i=1}^N |\tilde{C}_i|$

Donc $\lambda^*(E) \geq \sum_{i=1}^N |C_i| + \frac{\epsilon}{2}$

Donc $\lambda^*(E) \geq \sum_{i \geq 1} |C_i|$

□

3 Ensembles Lebesgue-mesurables et mesure de Lebesgue

Définition 2.5

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$.

- On dit que E est Lebesgue-mesurable (ou mesurable) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe O ouvert contenant E et tel que $\lambda^*(O \setminus E) \leq \epsilon$.
- Si E est un ensemble mesurable, on définit la mesure de Lebesgue de E par $\lambda(E) = \lambda^*(E)$.

Proposition 2.11

- Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est mesurable.
- Si $\lambda^*(E) = 0$, alors E est mesurable.
- Une réunion dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable.

Proposition 2.12

Tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est mesurable.

Démonstration. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. On écrit, $F = \bigcup_{k \geq 1} F \cap \overline{B}(0, k)$: réunion dénombrable

de compacts. Il suffit donc de montrer que tout compact est mesurable.

Soit F un compact de $\mathbb{R}^n$. On a $\lambda^*(F) < +\infty$ et il existe un ouvert O tel que $F \subset O$ et tel que $\lambda^*(O) \leq \lambda^*(F) + \epsilon$.

On va montrer que $\lambda^*(O \setminus F) \leq \epsilon$.

On décompose $O \setminus F = \bigcup_{i \geq 1} C_i$ (réunion dénombr. de cubes quasi disjoints).

On pose $K_N = \bigcup_{i=1}^N C_i$. Ainsi, $d(K_N, F) > 0$.

Donc $\lambda^*(K_N \cup F) = \lambda^*(K_N) + \lambda_*(F)$

Donc $\lambda^*(O) \leq \sum_{i=1}^N |C_i| + \lambda^*(F)$

Donc $\sum_{i \geq 1} |C_i| \leq \lambda^*(F) - \lambda^*(O) \leq \epsilon$

c'est-à-dire

$$\lambda^*(O \setminus F) \leq \epsilon.$$

□

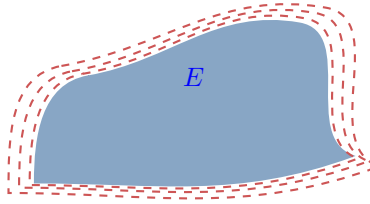
Proposition 2.13

Le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable.

Démonstration. Soit E mesurable et soit $\epsilon > 0$.

Pour tout $k \geq 1$, il existe O_k ouvert contenant E et tel que $\lambda^*(O_k \setminus E) \leq \frac{1}{k}$.

On pose $Z = \bigcup_{k \geq 1} O_k^c$ (mesurable).



$Z \subset E^c$ et $E^c \setminus Z = Z^c \setminus E = \bigcap_{k \geq 1} O_k \setminus E$. Donc $\lambda^*(E^c \setminus Z) = 0$.

□

Proposition 2.14

Une intersection dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable.

Démonstration.

$$\bigcap_{i \geq 1} E_i = \left(\bigcup_{i \geq 1} E_i^c \right)^c.$$

□

Définition 2.6

Si E est un ensemble mesurable, on définit la mesure de Lebesgue de E par $\lambda(E) = \lambda^*(E)$.

Proposition 2.15

Soit $(E_i)_{i \geq 1}$ une famille dénombrable d'ensembles mesurables et disjoints dans $\mathbb{R}^n$. Alors $E = \bigcup_{i \geq 1} E_i$ est mesurable. De plus,

$$\lambda(E) = \sum_{i \geq 1} \lambda(E_i).$$

Démonstration. On va montrer que $\lambda(E) \geq \sum_{i \geq 1} \lambda(E_i)$ en montrant que pour tout $\epsilon > 0$, $N \geq 1$,

$$\lambda(E) \geq \sum_{i=1}^N \lambda(E_i) - \epsilon.$$

On suppose que les E_i sont bornés.

E_i^c est mesurable : il existe O_i ouvert tel que $\lambda^*(O_i \setminus E_i^c) \leq \frac{\epsilon}{2^i}$.

Les ensembles $F_i = O_i^c \subset E_i$ sont des compacts disjoints.

Ainsi, $d(F_i, F_j) > 0$ pour tous $i \neq j$ et on a donc $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^N F_i\right) = \sum_{i=1}^N \lambda(F_i)$.

$$\lambda(E) \geq \lambda\left(\bigcup_{i=1}^N F_i\right) = \sum_{i=1}^N \lambda(F_i) \geq \sum_{i=1}^N \left(\lambda(E_i) - \frac{\epsilon}{2^i}\right) \geq \sum_{i=1}^N \lambda(E_i) - \epsilon$$

Car $E_i = F_i \cup (E_i \setminus F_i)$, donc $\lambda(E_i) \leq \lambda(F_i) + \lambda^*(E_i \setminus F_i)$.

Dans le cas général (les E_i ne sont pas nécessairement bornés) :

On utilise une suite de cubes croissante (C_k) telle que $\bigcup_{k \geq 1} C_k = \mathbb{R}^n$.

On pose $D_k = C_k \setminus C_{k-1}$.

Ainsi, $E = \bigcup_{i \geq 1} E_i = \bigcup_{i, k \geq 1} E_i \cap D_k$ où les $E_i \cap D_k$ sont bornés deux à deux disjoints. Donc

$$\lambda(E) = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} \lambda(E_i \cap D_k) = \sum_{i \geq 1} \lambda(E_i).$$

□

Proposition 2.16

Soit (E_i) une suite d'ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$.

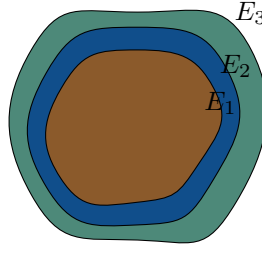
— Si pour tout $i \geq 1$, $E_i \subset E_{i+1}$, alors $\lambda\left(\bigcup_{i \geq 1} E_i\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \lambda(E_N)$.

— Si pour tout $i \geq 1$, $E_{i+1} \subset E_i$ et si $\lambda(E_1) < +\infty$, alors $\lambda\left(\bigcap_{i \geq 1} E_i\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \lambda(E_N)$.

Démonstration.

— Soit (E_i) une suite croissante d'ensembles mesurables.

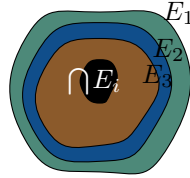
On pose $A_1 = E_1$ et pour tout $k \geq 2$, $A_k = E_k \setminus E_{k-1}$.



$$\lambda(E_N) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N \lambda(A_i) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{i \geq 1} \lambda(A_i) = \lambda\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right).$$

- Soit (E_i) une suite décroissante d'ensembles mesurables telle que $\lambda(E_1) < +\infty$.
On pose $A_k = E_k \setminus E_{k+1}$.

$$E_1 = \left(\bigcap_{i \geq 1} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right).$$



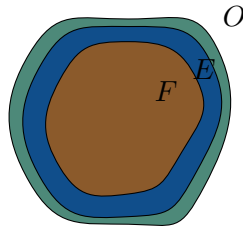
$$\begin{aligned} \lambda(E_1) &= \lambda\left(\bigcap_{i \geq 1} E_i\right) + \sum_{i \geq 1} \lambda(A_i) = \lambda\left(\bigcap_{i \geq 1} E_i\right) + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \lambda(A_i) \\ &= \lambda\left(\bigcap_{i \geq 1} E_i\right) + \lambda(E_1) - \lim_{N \rightarrow +\infty} \lambda(E_N) \end{aligned}$$

□

Proposition 2.17 – Régularité

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable.

- Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert O tel que $E \subset O$ et $\lambda(O \setminus E) \leq \epsilon$.
- Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé F tel que $F \subset E$ et $\lambda(E \setminus F) \leq \epsilon$.
- Si $\lambda(E) < +\infty$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K tel que $K \subset E$ et $\lambda(E \setminus K) \leq \epsilon$.



Démonstration.

- Le premier point correspond simplement à la définition de Lebesgue-mesurable.
- Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble et soit $\epsilon > 0$. E^c est mesurable donc il existe O ouvert tel que $E^c \subset O$ et $\lambda(O \setminus E^c) \leq 0$.
On pose $F = O^c \subset E$ fermé. On a $E \setminus F = O \setminus E^c$ et donc $\lambda(E \setminus F) \leq \epsilon$.

— On suppose que $\lambda(E) < +\infty$. Soit $\epsilon > 0$.

$$E = \bigcup_{k \geq 1} E \cap \overline{B}(0, k).$$

Comme $\lambda(E \cap B(O, N)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \lambda(E)$, il existe $N \geq 1$ tel que $\lambda(E) - \lambda(E \cap B_N) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

De plus, il existe K fermé inclus dans $E \cap B_N$ (donc compact) tel que $\lambda((E \cap B_N) \setminus K) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Au final,

$$\lambda(E) \leq \lambda(E \cap B_N) + \frac{\epsilon}{2} \leq \lambda(K) + \lambda((E \cap B_N) \setminus K) + \frac{\epsilon}{2} \leq \lambda(K) + \epsilon.$$

□

Corollaire 2.18

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est mesurable :

- si, et seulement si, il existe une famille dénombrable d'ouverts $(O_i)_{i \geq 1}$ et un ensemble de mesure nulle N tel que $E = \left(\bigcap_{i \geq 1} O_i \right) \setminus N$.
- si, et seulement si, il existe une famille dénombrable de fermés $(F_i)_{i \geq 1}$ et un ensemble de mesure nulle N tel que $E = \left(\bigcup_{i \geq 1} F_i \right) \cup N$.

Démonstration. Pour tout $i \geq 1$, on pose O_i tel que $E \subset O_i$ et $\lambda(O_i \setminus E) \leq \frac{1}{i}$.

On pose $N = \left(\bigcap_{i \geq 1} O_i \right) \setminus E$.

□

Proposition 2.19 – Invariance par translation

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble mesurable et $x \in \mathbb{R}^n$, alors l'ensemble translaté $x + E$ est mesurable et $\lambda(x + E) = \lambda(E)$.

Proposition 2.20 – Invariance par symétrie

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble mesurable, alors l'ensemble $-E$ est mesurable et $\lambda(-E) = \lambda(E)$.

Proposition 2.21 – Effet d'une dilatation

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble mesurable, alors l'ensemble αE est mesurable et $\lambda(\alpha E) = \alpha^n \lambda(E)$.

Proposition 2.22 – Effet d'une application linéaire

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble mesurable et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, alors l'ensemble $u(E)$ est mesurable et $\lambda(u(E)) = |\det(u)| \lambda(E)$.

4 Exemple d'un ensemble non Lebesgue-mesurable

On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $C_x = (x + \mathbb{Q}) \cap]0; 1[$ et $\mathcal{P} = \{C_x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Axiome du choix : on construit une application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow &]0; 1[\\ C & \longmapsto & \Phi(C) \end{cases}$$

où pour tout $C \in \mathcal{P}$, $\Phi(C) \in C$. On pose $A = \Phi(\mathcal{P})$.

On va montrer que A n'est pas mesurable.

— Pour tout $x \in]0, 1[$, il existe $q \in]-1; 1[\cap \mathbb{Q}$ tel que $x \in q + A$.

— $\forall r, s \in \mathbb{Q}, r \neq s \implies (r + A) \cap (s + A) = \emptyset$.

Supposons par l'absurde que A soit mesurable.

Soit $B = \bigcup_{q \in]-1; 1[\cap \mathbb{Q}} (q + A)$.

Comme $B \subset [-1; 2]$, $\lambda(B) \leq 3$ donc $\lambda(A) = 0$.

On en déduit donc que $\lambda(B) = 0$.

Or, $]0, 1[\subset B$, c'est absurde !

Chapitre 3

Théorie générale de la mesure

1 Tribus, algèbres, classes monotones et systèmes fondamentaux

Définition 3.1 – Tribu

Soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. On dit que $\mathcal{M}$ est une tribu si :

- $X \in \mathcal{M}$
- $A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M}$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$

Tribu discrète : $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$

Tribu grossière : $\mathcal{M} = \{\emptyset; X\}$.

L'intersection quelconque de tribus est une tribu :

Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, on définit $\sigma(\mathcal{A})$ comme étant la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$.

Définition 3.2 – Algèbre

Soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. On dit que $\mathcal{M}$ est une algèbre si :

- $X \in \mathcal{M}$
- $A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M}$
- $(A_n)_{1 \leq n \leq N} \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{1 \leq n \leq N} A_n \in \mathcal{M}$

Si $\mathcal{M}$ est une tribu, alors $\mathcal{M}$ est une algèbre.

Ainsi, si $E \subset \mathcal{P}(X)$, l'algèbre engendrée par E , notée $\mathcal{A}(E)$, vérifie $\mathcal{A}(E) \subset \sigma(E)$.

Définition 3.3 – Classe monotone

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. On dit que $\mathcal{C}$ est une classe monotone si

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ telle que $A_n \subset A_{n+1} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ telle que $A_{n+1} \subset A_n \ (\forall n \in \mathbb{N}) \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$

Si $E \subset \mathcal{P}(X)$, la classe monotone engendrée par E , notée $CM(E)$, vérifie $CM(E) \subset \sigma(E)$.

Lemme 3.1

Si $\mathcal{M}$ est une algèbre et une classe monotone, alors $\mathcal{M}$ est une tribu.

Démonstration.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \geq 0} \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right).$$

□

Lemme 3.2 – Classe monotone

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une algèbre. Alors $CM(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Démonstration. On veut montrer que $CM(\mathcal{A})$ est une tribu.

$$\text{Pour } E \in CM(\mathcal{A}), \text{ on pose } \mathcal{C}(E) = \left\{ F \in CM(\mathcal{A}); \begin{array}{l} E \setminus F \\ F \setminus E \\ E \cap F \end{array} \right\} \in CM(\mathcal{A}) \Big\}.$$

Alors $\mathcal{C}(E)$ est une classe monotone.

Pour tout $E \in \mathcal{A}$, $\mathcal{C}(E) = CM(\mathcal{A})$.

Or, pour tout $E, F \in CM(\mathcal{A})$, $E \in \mathcal{C}(F) \iff F \in \mathcal{C}(E)$.

Donc pour tout $E \in CM(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}(E) = CM(\mathcal{A})$.

Conséquence : $CM(\mathcal{A})$ est une algèbre (et donc une tribu).

□

Définition 3.4 – Système fondamental

Soit $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$. On dit que $\mathcal{R}$ est un système fondamental si :

- $X \in \mathcal{R}$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ telle que $A_n \subset A_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) $\implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$
- $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Pour $E \subset \mathcal{P}(X)$, on note $SF(E)$ le plus petit système fondamental engendré contenant E .

On a $SF(E) \subset \sigma(E)$.

Lemme 3.3 – Système fondamental

Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ stable par intersection finie. Alors $SF(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

Démonstration. Similaire à celle du lemme de la classe monotone.

□

Application aux probabilités

Proposition 3.4

Soient $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ deux mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{M})$. Soit $\mathcal{E}$ une famille de parties de Ω stable par intersection finie telle que $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{E})$. Si $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ coïncident sur $\mathcal{E}$, alors elles coïncident sur $\mathcal{M}$.

Démonstration. On pose $\tau = \{A \in \sigma(\mathcal{E}); \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$. Ainsi, τ est un système fondamental (à vérifier) qui contient $\mathcal{E}$. On a donc $SF(\mathcal{E}) \subset \tau$ et donc $\sigma(\mathcal{E}) \subset \tau$.

□

Corollaire 3.5

- Deux mesures de probabilités $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont égales si, et seulement si, elles ont même fonction de répartition.
- Deux variables aléatoires réelles ont même loi si, et seulement si, elles ont même fonction de répartition.

Remarque. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ désigne la tribu des Boréliens de $\mathbb{R}$. Il s'agit de la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$. La partie qui suit définit d'ailleurs de manière plus générale la notion de tribu Borélienne.

2 Espaces mesurables et fonctions mesurables

Définition 3.5

Soit X un ensemble et $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ une tribu. On dit que $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable.

Définition 3.6

Soit (X, τ) un espace topologique. On appelle tribu Borélienne associée à τ la tribu $\mathcal{B} = \sigma(\tau)$.

Sur $\mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n)$

Boréliens de $\mathbb{R}$:

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par :

- $\mathcal{A}_1 = \{[q, +\infty[, q \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{A}_2 = \{]q, +\infty], q \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{A}_3 = \{]-\infty, q], q \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{A}_4 = \{[-\infty, q[, q \in \mathbb{Q}\}$

Topologie de $[0, +\infty]$:

Les ouverts de $[0, +\infty]$ sont :

- les ouverts de $[0, +\infty[$.
- $[0, +\infty]$
- les complémentaires des compacts de $[0, +\infty[$.

Boréliens de $[0, +\infty]$:

$\mathcal{B}([0, +\infty])$ est constituée des ensembles :

- $A \in \mathcal{B}([0, +\infty[)$
- $A \cup \{+\infty\}$ où $A \in \mathcal{B}([0, +\infty[)$.

$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendrée par :

- $\mathcal{A}_1 = \{[q, +\infty], q \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{A}_2 = \{]q, +\infty], q \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{A}_3 = \{[-\infty, q], q \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{A}_4 = \{[-\infty, q[, q \in \mathbb{Q}\}$

Définition 3.7

Soit $f : (X_1, \mathcal{M}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{M}_2)$. On dit que f est mesurable si pour tout $M \in \mathcal{M}_2$, $f^{-1}(M) \in \mathcal{M}_1$.

Proposition 3.6

Soit $f : X_1 \rightarrow X_2$.

- Si $\mathcal{M}$ est une tribu sur X_2 , alors $f^{-1}(\mathcal{M}) = \{f^{-1}(M), M \in \mathcal{M}\}$ est une tribu sur X_1 , appelée tribu image réciproque de $\mathcal{M}$.
- Si $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{N})$, alors $f^{-1}(\mathcal{M}) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{N}))$.

Démonstration. On a clairement $f^{-1}(\mathcal{N}) \subset f^{-1}(\mathcal{M})$ donc $\sigma(f^{-1}(\mathcal{N})) \subset f^{-1}(\mathcal{M})$.

Soit τ une tribu telle que $f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \tau$.

Montrons que $f^{-1}(\mathcal{M}) \subset \tau$.

On considère $\{M \in \mathcal{P}(X_2), f^{-1}(M) \in \tau\}$ qui est une tribu contenant $\mathcal{N}$. □

Proposition 3.7

Soit $f : (X_1, \mathcal{M}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{M}_2)$ avec $\mathcal{M}_2 = \sigma(\mathcal{N}_2)$. Alors f est mesurable si, et seulement si, $f^{-1}(\mathcal{N}_2) \subset \mathcal{M}_1$

Proposition 3.8

Soit $f : (X_1, \tau_1) \longrightarrow (X_2, \tau_2)$ une fonction continue où (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) sont des espaces topologiques. Alors, avec les tribus Boréliennes associées, f est mesurable.

Remarque : Si (X, τ) est un espace topologique, la tribu des Boréliens associée est $\sigma(\tau)$.

Proposition 3.9

La composée de fonctions mesurables est mesurable.

Définition 3.8

Soient $(X_1, \mathcal{M}_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2)$ deux espaces mesurables.

La tribu produit $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ est la tribu sur $X_1 \times X_2$ engendrée par $\{A \times B, A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2\}$.

Remarque : c'est la plus petite tribu telles que les projections $p_1 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$ et $p_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$ soient mesurables.

Exemple : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 3.10

Soit $f : X \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ où $Y_1 \times Y_2$ est muni de la tribu $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$. Alors f est mesurable si, et seulement si, $f_1 = p_1 \circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$ sont mesurables.

Proposition 3.11

Soient $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty], \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mesurables.

- Alors $f + g, f \times g$ et $|f|$ sont mesurables.
- Si de plus f ne s'annule pas (ou si f est à valeurs dans $[0, +\infty]$), alors $\frac{1}{f}$ est mesurable.

Proposition 3.12

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables ($f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ ou $\overline{\mathbb{R}}$). Alors

- $\sup_{n \in \mathbb{N}}(f_n)$ et $\inf_{n \in \mathbb{N}}(f_n)$ sont mesurables
- $\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$ sont mesurables.
- Si f_n converge simplement vers f , alors f est mesurable (également valable sur $\mathbb{C}$).

Démonstration. Soit $f = \sup_{n \in \mathbb{N}}(f_n)$.

$$f^{-1}([0; c]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([0; c])$$

□

3 Espaces mesurés

Définition 3.9

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. On dit que $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0; +\infty]$ est une mesure si

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ de parties deux à deux disjointes.

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ est appelé un espace mesuré.

- Espace mesuré fini : $\mu(X) < +\infty$.
- Espace mesuré σ -fini : $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ avec $\mu(X_n) < +\infty$.

Proposition 3.13

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.

- $A_1 \subset A_2 \implies \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$
- $A_n \subset A_{n+1} \implies \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$
- $A_{n+1} \subset A_n$ et $\mu(A_0) < +\infty \implies \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$
- En général, $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Démonstration. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ où $B_n = \bigcup_{i=0}^n A_i$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ où $C_n = B_n \setminus B_{n-1} \subset A_n$.

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

□

Définition 3.10

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.

$N \subset X$ est négligeable s'il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

Définition 3.11

Un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est dit complet si tout ensemble négligeable de X appartient à $\mathcal{M}$.

Exemple : $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n)$ est complet.

4 Construction de mesures

Définition 3.12 – Mesure induite

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{M}$.

On définit la tribu $\mathcal{M}(A) = \{A \cap B; B \in \mathcal{M}\}$ et μ_A la mesure :

$$\forall E \in \mathcal{M}(A), \mu_A(E) = \mu(E).$$

On obtient ainsi un espace mesuré $(A, \mathcal{M}(A), \mu_A)$ appelé espace mesuré induit.

Définition 3.13 – Mesure image

Soit $\phi : (X, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ une fonction mesurable.

On appelle mesure image de μ par ϕ la mesure $\nu = \phi_*\mu$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{N}, \quad \nu(A) = \mu(\phi^{-1}(A)) = \mu(\{x \in X; \phi(x) \in A\}).$$

Remarque : en probabilité, l'espace mesuré est souvent noté $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ et si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire (c'est-à-dire une fonction mesurable), $X_*\mathbb{P}$ est notée $\mathbb{P}_X$.

Proposition 3.14

Soit $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ une fonction mesurable. Alors l'application

$$v_f : \begin{cases} \mathcal{M} & \longrightarrow & [0; +\infty] \\ A & \longmapsto & \int_A f d\mu \end{cases}$$

est une mesure sur $\mathcal{M}$.

Démonstration. La preuve sera faite au chapitre suivant. □

Définition 3.14 – Mesure de densité

La mesure v_f donnée par la proposition précédente est appelée mesure de densité f par rapport à μ . Elle est notée $f \cdot \mu$.

Remarque : Si $\nu = f \cdot d\mu$, on note aussi $d\nu = f d\mu$.

Exemple : en probabilité, on considère souvent la distribution exponentielle de paramètre $\alpha > 0$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \mathbb{1}_{[0; +\infty[}(x) \alpha e^{-\alpha x} \end{cases}$$

et la mesure de densité $f \cdot \lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue.

Une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow [0; +\infty[$ suit une loi exponentielle de paramètre α , si $\mathbb{P}_X =$

$f \cdot \lambda$.

Autrement dit, si pour tout ensemble $A \subset \Omega$ mesurable,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A \mathbb{1}_{[0; +\infty[}(x) \alpha e^{-\alpha x} d\lambda(x).$$

On verra dans le chapitre sur les espaces produits que si $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ sont deux espaces mesurables, la tribu produit $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est engendrée par les pavés mesurables. On peut ensuite construire la mesure produit de deux espaces mesurés de la façon suivante.

Proposition 3.15

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés. Il existe une mesure λ sur $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ telle que $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

De plus, si μ et ν sont σ -finies, alors cette mesure est unique. On la note $\mu \otimes \nu$.

Démonstration. La preuve sera faite dans le chapitre sur les espaces produits $\square$

Conséquence : une fois construite la mesure de Lebesgue $\lambda_{\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, il existe une unique mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ telle que la mesure de tout ensemble de la forme $A \times B$ soit $\lambda_{\mathbb{R}}(A) \times \lambda_{\mathbb{R}}(B)$

5 Mesures boréliennes

Définition 3.15 – Mesure borélienne

Soit (X, τ) un espace topologique et $\mathcal{B} = \sigma(\tau)$ la tribu borélienne associée à τ . On appelle **mesure borélienne** toute mesure μ définie sur la tribu $\mathcal{B}$ qui est finie sur tout compact.

Dans la suite de cette partie, μ désigne une mesure borélienne sur $\mathcal{B} = \sigma(\tau)$.

Définition 3.16

— Un ensemble $B \in \mathcal{B}$ est **extérieurement régulier** si

$$\mu(B) = \inf \{ \mu(O), O \text{ ouvert et } B \subset O \}.$$

— Un ensemble $B \in \mathcal{B}$ est **intérieurement régulier** si

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(K), K \text{ compact et } K \subset B \}.$$

— Un ensemble $B \in \mathcal{B}$ est **régulier** s'il est intérieurement et extérieurement régulier.

— La mesure μ est **régulière** si tout ensemble $B \in \mathcal{B}$ est régulier.

Proposition 3.16

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'ensembles boréliens réguliers. Alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ est un borélien régulier.

Démonstration. On peut supposer que la suite est croissante.

— Montrons la régularité intérieure de $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n).$$

Soit $\alpha < \mu(B)$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha < \mu(B_n) \leq \mu(B)$.

Il existe un compact $K \subset B_n \subset B$ tel que $\alpha < \mu(K) \leq \mu(B)$.

Donc $\inf \{ \mu(K), K \text{ compact et } K \subset B \} \geq \mu(B)$

— Montrons la régularité extérieure de $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe O_n ouvert tel que $B_n \subset O_n$ et $\mu(O_n) \leq \mu(B_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$.

On pose $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Alors

$$\mu(U) \leq \mu(B) + \epsilon.$$

On pose $U_n = \bigcup_{i=0}^n O_i$.

On prouve par récurrence que :

$$\mu(U_n) \leq \mu(B_n) + \sum_{k=0}^n \frac{\epsilon}{2^k}.$$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons qu'elle est vraie au rang n .

$$\begin{aligned} \mu(U_{n+1}) &= \mu(U_n) + \mu(O_{n+1}) - \mu(U_n \cap (O_{n+1})) \\ &\leq \mu(B_n) + \sum_{k=0}^n \frac{\epsilon}{2^k} + \mu(O_{n+1}) - \mu(B_n) \\ &\leq \mu(O_{n+1}) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\epsilon}{2^k} \end{aligned}$$

□

Proposition 3.17

On suppose X métrisable, localement compact et séparable. Alors toute mesure borélienne sur X est régulière.

Démonstration. Soit μ une mesure borélienne sur X .

Soit O ouvert. On va montrer que O est régulier.

O est localement compact et séparable donc il existe une suite croissante K_n compacts de X tels que $K_n \subset O$ et tels que $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

On a $\mu(O) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(K_n)$ donc O est intérieurement régulier.

On note $\mathcal{B}_r$ l'ensemble des boréliens réguliers.

On va montrer que $\mathcal{B}_r$ est une tribu.

— Supposons que X est compact (donc $\mu < \infty$). Soit $B \in \mathcal{B}_r$. Soit $\epsilon > 0$.

Il existe $K \subset B \subset O$ tels que $\lambda(B) - \lambda(K) < \epsilon$ et $\lambda(O) - \lambda(B) < \epsilon$.

$$\mu(B^c) - \mu(O^c) = (\mu(X) - \mu(B)) - (\mu(X) - \mu(O)) = \mu(O) - \mu(B) < \epsilon$$

Ainsi, toute mesure borélienne sur un espace métrique compact est régulière.

— Supposons que X est métrisable, localement compact et séparable. $X_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Soit $B \in \mathcal{B}_r$. On pose $B_n = B \cap K_n$.

Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est régulier.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note μ_n la mesure induite par μ sur K_n .

μ_n est régulière.

On montre la régularité intérieure de B_n :

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $L_n \subset B_n$ compact tel que $\mu_n(B_n) - \mu_n(L_n) < \epsilon$.

K_n est compact donc L_n est un compact de X et $\mu(L_n) = \mu_n(L_n)$.

On montre la régularité extérieure de B_n :

Soit $\epsilon > 0$. Il existe un ouvert V_n de K_n tel que $V \subset B_n$ et tel que $\mu(V_n) - \mu(B_n) < \epsilon$.

On pose $U_n = V_n \cup (V \setminus K_n)$. Alors U est un ouvert de X .

De plus, $\mu(U_n) - \mu(B_n) < \epsilon$.

□

Proposition 3.18

Si μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$, invariante par translation, il existe une constante c telle que $\mu(B) = c\lambda(B)$ pour tout borélien B .

Démonstration. Montrons l'existence de $c \in \mathbb{R}^+$ telle que $\mu(C) = c|C|$ pour tout cube C . On voit que pour $m \in \mathbb{N}^*$, en écrivant $[0; 1[^n$ comme réunion de 2^{mn} cubes :

$$\mu([0; 1[^n) = 2^{mn} \mu(C)$$

où C est l'un de ces cubes.

$$\text{Donc } \mu(C) = \frac{\mu([0; 1[^n)}{2^{mn}} = \mu([0; 1[^n) \times \lambda(C) = c\lambda(C).$$

On en déduit que pour tout ouvert O , $\mu(O) = c\lambda(O)$ puis l'égalité pour tout borélien (par régularité de μ). $\square$

Proposition 3.19

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble Lebesgue-mesurable. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Alors $u(E)$ est Lebesgue-mesurable et $\lambda(u(E)) = |\det(u)|\lambda(E)$.

Démonstration. Si u n'est pas inversible, son image est contenue dans un hyperplan. Ainsi, $u(\mathbb{R}^n)$ est négligeable et l'égalité est vérifiée pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mesurable.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ inversible. On suppose de plus que $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

$u(B) = (u^{-1})^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ car u^{-1} est continue.

Pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, on pose $\mu(B) = \lambda(u(B))$.

Ainsi, μ est la mesure image de λ par u^{-1} : c'est une mesure borélienne.

Comme elle est invariante par translation, il existe $c \geq 0$ tel que $\mu = c\lambda$.

On montre que $c = |\det(u)|$. Avec la décomposition polaire : $u = v \circ \phi$ (v symétrique défini positif et ϕ orthogonale). On a $c = c_v c_\phi$. On a $c_\phi = 1$ car $\phi(B) = B$ donc $\lambda(\phi(B)) = c_\phi \lambda(B) = \lambda(B)$. Et, $c_v = \det(v)$ car en diagonalisant v , on voit que le cube unité $[0, 1]^n$ se transforme en $[0, \alpha_1] \times \dots \times [0, \alpha_n]$.

Soit $E = B \cup N \subset \mathbb{R}^n$ une partie Lebesgue-mesurable. Il existe un Borélien N_0 tel que $N \subset N_0$ et $\lambda(N_0) = 0$.

Ainsi, $u(E) = u(B) \cup u(N)$ où $u(B)$ est un Borélien et $u(N)$ négligeable.

On en conclut que $u(E)$ est Lebesgue-mesurable.

De plus,

$$\lambda(u(E)) = \lambda(u(B)) = |\det(u)|\lambda(B) = |\det(u)|\lambda(E).$$

$\square$

Chapitre 4

Intégrale de Lebesgue

1 Intégration des fonctions étagées mesurables à valeurs dans $[0; +\infty[$

Définition 4.1 – Fonction étagée

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite étagée si $f(X)$ est un ensemble fini.

Définition 4.2 – Représentation standard

Supposons $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $[0; +\infty[$. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction étagée avec $\text{Card}(f(X)) = m < +\infty$. On note $f(X) = \{y_1, \dots, y_m\}$ et $A_i = f^{-1}(\{y_i\})$.

Alors $f = \sum_{i=1}^m y_i \mathbb{1}_{A_i}$.

Définition 4.3

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \rightarrow [0; +\infty[$ étagée mesurable de représentation standard $f = \sum_{i=1}^m y_i \mathbb{1}_{A_i}$. L'intégrale de f sur X est :

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^m y_i \mu(A_i).$$

Notation : $\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f(x) \mu dx = \int_X f$.

Remarque : Si $A \in \mathcal{M}$, $\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$.

Lemme 4.1

Soit $(X_j)_{1 \leq j \leq k}$ une partition de X d'ensembles mesurables, et soient $\alpha_j \in [0; +\infty[$ (pour $1 \leq j \leq k$), alors la fonction $f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbb{1}_{X_j}$ est étagée mesurable et

$$\int_X f d\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(X_j).$$

Démonstration. Soit $f = \sum_{i=1}^m y_i \mathbb{1}_{A_i}$ la représentation standard de f .

Alors pour $i \in \{1, \dots, m\}$, $A_i = \bigcup_{j \in I_i} X_j$ avec $I_i = \{j \in \{1, \dots, k\}, \alpha_j = y_i\}$. Donc

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^m y_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^m y_i \left(\sum_{j \in I_i} \mu(X_j) \right) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(X_j).$$

□

Proposition 4.2

Soient $f, g : X \rightarrow [0; +\infty[$ deux fonctions étagées mesurables et soit $\alpha \in [0; +\infty[$. Alors $f + \alpha g$ est étagée mesurable et

$$\int_X (f + \alpha g) d\mu = \int_X f d\mu + \alpha \int_X g d\mu.$$

Démonstration. Soient $f = \sum_{i=1}^m y_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^k z_j \mathbb{1}_{B_j}$ les représentations standards de f et g .

$X = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)$ et cette réunion est disjointe.

De plus, $f + \alpha g = \sum_{i,j} (y_i + \alpha z_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$. Donc,

$$\begin{aligned} \int_X (f + \alpha g) d\mu &= \sum_{i,j} (y_i + \alpha z_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^k \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^k \alpha z_j \sum_{i=1}^m \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^m y_i \mu(A_i) + \alpha \sum_{j=1}^k z_j \mu(B_j) = \int_X f d\mu + \alpha \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.3

Soient $f, g : X \rightarrow [0; +\infty[$ deux fonctions étagées mesurables ;

Si $f \leq g$, alors $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Définition 4.4

Soit $f : X \rightarrow [0; +\infty[$ une fonction étagée mesurable et soit $A \subset X$ un ensemble mesurable. On définit :

$$\int_A f d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A d\mu.$$

Remarque : si $f : X \rightarrow [0; +\infty[$ est une fonction étagée mesurable, et si A et B sont deux ensembles mesurables tels que $A \subset B \subset X$, alors

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

Proposition 4.4

Soit $f : [0; +\infty[$ une fonction étagée mesurable.

L'application $v_f : \begin{cases} \mathcal{M} & \rightarrow [0; +\infty[\\ A & \mapsto \int_A f d\mu \end{cases}$ est une mesure sur $\mathcal{M}$.

Démonstration.

$$— v_f(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = 0.$$

— Soit $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ une union disjointe d'ensembles mesurables.

Soit $f = \sum_{i=1}^m y_i \mathbb{1}_{X_i}$ la représentation standard de f .

$$\begin{aligned} v_f(A) &= \sum_{i=1}^m y_i \mu(A \cap X_i) \\ &= \sum_{i=1}^m y_i \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \cap X_i) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^m y_i \mu(A_n \cap X_i) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_f(A_n) \end{aligned}$$

□

2 Intégration des fonctions mesurables à valeurs dans $[0; +\infty]$

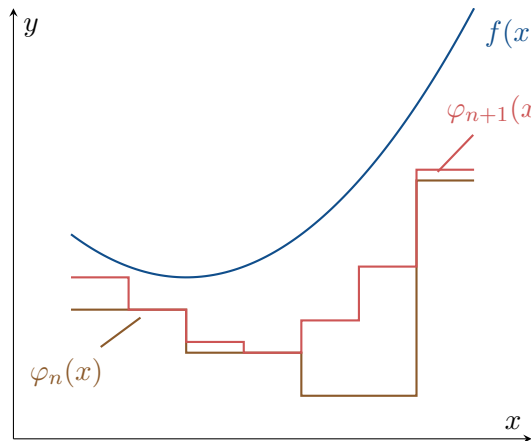
Théorème 4.5 – Approximation des fonctions mesurables positives

Soit $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite $(\varphi_n : X \rightarrow [0; +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées mesurables telles que :

— $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— (φ_n) converge simplement vers f .

De plus, si f est bornée sur $A \subset X$, alors φ_n converge uniformément vers f sur A .



Démonstration. Soit $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ une fonction mesurable.

On écrit $[0; +\infty] = [0; 2^n] \cup [2^n; +\infty] = \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{2^n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2^{2n}-1}{2^n}; 2^n\right] \cup [2^n; +\infty]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = f^{-1}([2^n; +\infty])$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, 2^{2n}-1\}$, on pose $E_{n,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$.

On pose enfin, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,k}} + 2^n \mathbb{1}_{F_n}.$$

Les fonctions φ_n sont mesurables et pour tout $x \in X$, $\varphi_n(x) \leq f(x)$.

Montrons que $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$. Soit $x \in X$. Supposons que $f(x) < 2^{n+1}$.

Alors il existe $k \in \{0, \dots, 2^{2n}-1\}$ tel que $f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\right]$.

Alors $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$ et $\varphi_{n+1}(x) = \frac{k}{2^n}$ ou $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} \geq \frac{k}{2^n}$.

Dans tous les cas, on a bien $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$.

On voit de plus que (φ_n) converge simplement vers f .

Supposons enfin que $A \subset X$ et que f est bornée sur A .

On considère n_0 tel que pour tout $x \in X$, $f(x) \leq 2^{n_0}$. Alors, pour $n \geq n_0$ et pour tout $x \in X$, $|\varphi_n(x) - f(x)| \leq 2^n$ □

Proposition 4.6

Soit $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ une fonction mesurable. Avec les fonctions φ_n étagées mesurables données par le théorème d'approximation, on a :

$$\int_X \varphi_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu, \varphi : X \rightarrow [0; +\infty] \text{ étagée mesurable telle que } \varphi \leq f \right\}.$$

Démonstration. La suite $\int_X \varphi_n d\mu$ est croissante donc elle admet une limite quand n tend vers $+\infty$.

En notant $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n d\mu$ et I le sup considéré, on a $l \leq I$. Montrons que $I \leq l$.

Soit $\varphi : X \rightarrow [0; +\infty]$ étagée mesurable telle que $\varphi \leq f$. On veut montrer que $\int_X \varphi d\mu \leq l$.

Soit $\alpha \in [0; 1]$. On pose $E_n = \{x \in X, \varphi_n(x) \geq \alpha \varphi(x)\}$. On a $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Ainsi, $\int_X \varphi_n d\mu \geq \int_{E_n} \varphi_n d\mu \geq \alpha \int_{E_n} \varphi d\mu = \alpha \int \varphi d\mu$.

Par conséquent, par passage à la limite,

$$\int_X \varphi d\mu = \int \varphi d\mu \leq l.$$

□

Définition 4.5

Si $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ est une fonction mesurable, on définit l'intégrale de f sur X par :

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu, \varphi : X \rightarrow [0; +\infty] \text{ étagée mesurable telle que } \varphi \leq f \right\}.$$

Définition 4.6

Si $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ est une fonction mesurable et si $A \subset X$ est un ensemble mesurable, on pose :

$$\int_A f d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A d\mu.$$

Remarque : Si $\mu(A) = 0$, alors pour toute fonction mesurable $f : X \rightarrow [0; +\infty]$, on a

$$\int_A f d\mu = 0.$$

Proposition 4.7

Soient $f, g : X \rightarrow [0; +\infty]$ des fonctions mesurables telles que $f \leq g$.

Alors $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Proposition 4.8

Soit $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ une fonction mesurable et $\alpha \geq 0$.

Alors $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$.

Proposition 4.9

Si $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ est une fonction mesurable, et si A et B sont deux ensembles mesurables tels que $A \subset B \subset X$, alors

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

Définition 4.7

Une fonction $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ est dite intégrable si elle est mesurable et si

$$\int_X f d\mu < +\infty.$$

Proposition 4.10

Si $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ est intégrable, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Démonstration. Supposons que $m = \mu(\{f = +\infty\}) > 0$.

En notant φ_n la suite de fonctions étagées approximant f , on a :

pour tout $x \in \{f = +\infty\}$, $\varphi_n(x) = 2^n$.

Par conséquent,

$$\int_X \varphi_n d\mu \geq m 2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

□

Théorème 4.11 – Convergence monotone

Soit $f_n : X \rightarrow [0; +\infty]$ mesurables telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f_{n+1}$. Alors, avec $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, on a :

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

Démonstration. La suite $\left(\int_X f_n d\mu\right)$ est croissante donc elle admet une limite l lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f$ donc $l \leq \int_X f d\mu$. On va montrer que $\int_X f d\mu \leq l$.

Soit $\varphi : X \rightarrow [0; +\infty[$ une fonction étagée mesurable telle que $\varphi \leq f$.

Soit $\alpha \in [0; 1[$. On pose $E_n = \{x \in X, f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$.

Alors $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

$$v_{f_n}(X) \geq v_{f_n}(E_n) \geq v_{\alpha\varphi}(E_n)$$

Or, $v_{\alpha\varphi}(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha v_\varphi(X)$.

Par conséquent, $l \geq \alpha \int_X \varphi d\mu$ et on a donc $l = \int_X f d\mu$. $\square$

Remarque : Avec les hypothèses du théorème de convergence monotone, f est intégrable si, et seulement si, $\left(\int_X f_n d\mu\right)$ est majorée.

Corollaire 4.12

Soient $f, g : X \rightarrow [0; +\infty]$ deux fonctions mesurables. Alors

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Démonstration. Soient $f, g : X \rightarrow [0; +\infty]$ deux fonctions mesurables. On considère deux suites (f_n) et (g_n) de fonctions étagées mesurables de X dans $[0; +\infty]$ telles que $f_n \leq f_{n+1}$, $g_n \leq g_{n+1}$ et telles que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ et $g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_X (f_n + g_n) d\mu = \int_X f_n d\mu + \int_X g_n d\mu.$$

En passant à la limite, on obtient :

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

$\square$

Corollaire 4.13

Soit $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ une fonction mesurable. Alors l'application

$$v_f : \begin{cases} \mathcal{M} & \rightarrow [0; +\infty] \\ A & \mapsto \int_A f d\mu \end{cases}$$

est une mesure sur $\mathcal{M}$.

Démonstration. Soit $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ une fonction mesurable. On a clairement $v_f(\emptyset) = 0$.

Soient $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ une réunion disjointe de parties mesurables.

On pose $g_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}$.

La suite $(g_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables qui converge vers $(\mathbb{1}_A f)$.

D'après le théorème de convergence monotone :

$$\int_X g_n f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X \mathbb{1}_A f d\mu = \int_A f d\mu.$$

Ainsi, $v_f(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_f(A_n)$. □

Définition 4.8 – Mesure de densité

La mesure v_f donnée par le corollaire précédent est appelée mesure de densité f par rapport à μ . Elle est notée $f \cdot \mu$.

Définition 4.9 – Égalité presque partout

Soient $f, g : X \rightarrow Y$. On dit que $f = g \ \mu - p.p.$ s'il existe $N \subset X$ négligeable tel que pour tout $x \in N^c$, $f(x) = g(x)$.

Remarque : $f = g \ \mu p.p.$ si, et seulement si, il existe $N \subset X$ mesurable de mesure nulle tel que pour tout $x \in N^c$, $f(x) = g(x)$.

Définition 4.10 – Propriété vraie presque partout

Si $\mathcal{P}(x)$ est une propriété, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie $\mu - p.p.$ s'il existe $N \subset X$ négligeable tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in N^c$.

Proposition 4.14

Soit $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ une fonction mesurable. Alors,

$$f = 0 \ \mu - p.p. \text{ si, et seulement si, } \int_X f d\mu = 0.$$

Démonstration. Supposons que $f = 0 \ \mu - p.p.$

Si f est étagée : soit $f = \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{1}_{A_j}$ la représentation standard de f . On a, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $y_j = 0$ ou $\mu(A_j) = 0$

Ainsi, $\int_X f d\mu = \sum y_j \mu(A_j) = 0$.

Cas général : $\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu ; \varphi \text{ étagée mesurable et positive, } \varphi \leq f \right\} = 0$.

Réciproquement, supposons que $\int_X f d\mu = 0$.

On pose $E_n = \left\{ x \in X ; f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n = \{x \in X ; f(x) > 0\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n) = 0$ donc $\mu(E) = 0$. De plus, pour tout $x \in E^c$, $f(x) = 0$. □

Corollaire 4.15

Soient $f, g : X \rightarrow [0; +\infty]$ deux fonctions mesurables.

Si $f = g \ \mu - p.p.$, alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

En particulier, f est intégrable si, et seulement si, g est intégrable.

Démonstration. On pose $h = \min(f, g)$. Ainsi, $f - h \geq 0$ et $f - h = 0 \ \mu - p.p.$

On a donc $\int_X (f - h) d\mu = 0$ et donc $\int_X f d\mu = \int_X h d\mu$.

On obtient de même que $\int_X g d\mu = \int_X h d\mu$, ce qui permet de conclure. □

Théorème 4.16 – Convergence monotone

Soient $f_n : X \rightarrow [0; +\infty]$ mesurables telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f_{n+1}$ μ -p.p. et soit $f : X \rightarrow [0; +\infty]$ mesurable telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ μ -p.p.. Alors,

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

Démonstration. Soit $E = \{x \in X; \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)\}$. On a, par hypothèse, $\mu(E^c) = 0$.

La fonction $f - f\mathbb{1}_E$ est mesurable positive et nulle presque partout.

$$\text{Donc } \int_X f d\mu = \int_E f d\mu.$$

$$\text{Idem pour les fonction } f_n - f_n\mathbb{1}_E : \int_X f_n d\mu = \int_E f_n d\mu.$$

La suite $(f_n\mathbb{1}_E)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers $f\mathbb{1}_E$.

On obtient le résultat avec le théorème de convergence monotone. $\square$

Théorème 4.17 – Lemme de Fatou

Soit $f_n : X \rightarrow [0; +\infty]$ une suite de fonctions mesurables. Alors

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration. On a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{k \geq n} f_k \right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \inf_{k \geq n} f_k \right\}$.

On pose $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. La suite g_n est croissante.

D'après le théorème de convergence monotone, $\int_X g_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \geq n$, on a $g_n \leq f_k$.

On en déduit que

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_k d\mu$$

puis que

$$\int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

$\square$

Corollaire 4.18

Soit $f_n : X \rightarrow [0; +\infty]$ une suite de fonctions mesurables.

On suppose que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ μ -p.p. avec f mesurable. Alors,

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

3 Fonctions intégrables à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ **Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$**

On pose $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.

On a

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Définition 4.11 – – Intégrable

On dit que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est μ -intégrable si f est mesurable et si $\int_X |f| d\mu < \infty$. Dans ce cas, on pose

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

— Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable et $A \subset X$ est un ensemble mesurable, on pose

$$\int_A f d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A d\mu.$$

— On note $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions intégrables de X dans $\mathbb{R}$ où X est muni de la mesure μ .

Proposition 4.19

$\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -ev et l'application

$$\mathcal{J} : \begin{cases} \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \int_X f d\mu \end{cases}$$

est linéaire et continue pour la semi-norme sur $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ définie par :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})} = \int_X |f| d\mu.$$

Si f et g sont intégrables, $\int |f + \alpha g| d\mu \leq \int |f| d\mu + |\alpha| \int |g| d\mu < +\infty$.

On a $\mathcal{J}(f + \alpha g) = \mathcal{J}(f) + \alpha \mathcal{J}(g)$.

Enfin,

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= \left| \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_X f^+ d\mu \right| + \left| \int_X f^- d\mu \right| \\ &\leq \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu \\ &\leq \int_X |f| d\mu \end{aligned}$$

Proposition 4.20

— Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On suppose qu'il existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f| \leq g$. Alors f est intégrable.

— Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables telles que $f \leq g$.

Alors $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

— Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables telles que $f = g$ μ -p.p..

Alors f est intégrable si, et seulement si, g est intégrable.

Dans ce cas, on a $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

— Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Alors $\{x \in X; f(x) \neq 0\}$ est σ -fini.

— Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables telles que $f = g$ μ -p.p.. Supposons que f est de plus intégrable.

La fonction mesurable positive $|g - f|$ est nulle μ -p.p..

Donc $\int_X |g - f| d\mu = 0$.

Ainsi, $g = (g - f) + f$ est intégrable.

De plus,

$$\left| \int_X (g - f) d\mu - \int_X g d\mu \right| \leq \int_X |f - g| d\mu = 0,$$

et on a donc

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$$

— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \left\{ x \in X; |f(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}$.

Alors

$$\|f\|_1 \geq \int_{E_n} |f| d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n).$$

Par conséquent, $\{x \in X; f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ avec $\mu(E_n) < +\infty$.

Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}^n$

Définition 4.12 – Intégrable à valeurs dans $\mathbb{C}$

On dit que $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ est μ -intégrable si f est mesurable et si $\int_X |f| d\mu < \infty$.

Dans ce cas, on pose

$$\int_X f d\mu = \int_X \operatorname{Re}(f) d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(f) d\mu.$$

Définition 4.13 – Intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On dit que f est μ -intégrable si pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, f_i est intégrable.

Dans ce cas, on pose
$$\int_X f d\mu = \begin{pmatrix} \int_X f_1 d\mu \\ \vdots \\ \int_X f_n d\mu \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.21

Soit $A \subset X$ un ensemble mesurable et soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Alors f est μ_A -intégrable si, et seulement si, f est la restriction à A d'une fonction $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $g\mathbb{1}_A$ est μ -intégrable.

Dans ce cas,

$$\int_A f d\mu_A = \int_A g d\mu.$$

4 Théorème de convergence dominée

Théorème 4.22 – Convergence dominée

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f_n : X \rightarrow Y$ une suite de fonctions intégrables. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction mesurable telle que :

- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ μ -p.p.
- il existe $g : x \rightarrow [0; +\infty[$ intégrable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq g$ μ -p.p.

Alors, f est intégrable et $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Remarque : La conclusion du théorème implique également que $\int_X f_n d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_X f d\mu$.

Démonstration.

- On suppose que les hypothèses sont vérifiées « partout ».
Par passage à la limite, $|f| \leq g$ donc f est intégrable. On pose $h_n = 2g - |f_n - f|$ (mesurables et positives).
Lemme de Fatou :

$$\begin{aligned} \int_X \liminf h_n d\mu &\leq \liminf \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu \\ &= \int_X 2g d\mu + \liminf \int_X (-|f_n - f|) d\mu \\ &= \int_X 2g d\mu - \limsup \int_X (|f_n - f|) d\mu \end{aligned}$$

Or, $\liminf h_n = 2g$ donc $\limsup \int_X (|f_n - f|) d\mu \leq 0$.

Finalement, $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

- On suppose les hypothèses « presque-partout ».
On peut supposer qu'il existe $N \in \mathcal{M}$ de mesure nulle tel que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ sur N^c et tel que $|f_n| \leq g$ sur N^c .
Par passage à la limite, $|f| \leq g$ sur N^c .
Donc $f \mathbb{1}_{N^c}$ est intégrable et donc f aussi.
Pour toute fonction ψ , on note $\widehat{\psi} = \psi \mathbb{1}_{N^c}$.
Alors $\widehat{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \widehat{f}$ et $|\widehat{f_n}| \leq \widehat{g}$ (partout).
On en déduit que $\int_X (|\widehat{f_n} - \widehat{f}|) d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$
puis que $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

□

Il est en outre possible d'énoncer une autre version du théorème de convergence dominée, dans le cas où l'on ne suppose pas que la fonction f est mesurable.

Théorème 4.23 – Convergence dominée

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f_n : X \rightarrow Y$ une suite de fonctions intégrables. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction telle que :

- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ μ -p.p.
- il existe $g : x \rightarrow [0; +\infty[$ intégrable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ -p.p.

Alors, il existe $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ intégrable telle que $f = \tilde{f}$ μ -p.p. et telle que

$$\int_X |f_n - \tilde{f}| d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Exemple : Montrer que la suite définie par $u_n = \int_{[0; \frac{\pi}{2}]} \sin^n(x) d\lambda(x)$ converge et déterminer sa limite.

Solution :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \sin^n(x)$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc mesurable.
- Pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $|\sin^n(x)| \leq 1$ où la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

On note $f : \begin{cases} [0; \frac{\pi}{2}] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$.

D'après le théorème de convergence dominée, :

- f est intégrable ;
- $\int_{[0; \frac{\pi}{2}]} |\sin^n(x)| d\lambda(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$;
- $\int_{[0; \frac{\pi}{2}]} \sin^n(x) d\lambda(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

5 Théorème de continuité et de dérivabilité sous l'intégrale

Théorème 4.24 – Théorème de continuité

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et (E, d) un espace métrique. Soit $a \in E$ et $f : X \times E \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $y \in E$, $f_y : x \in X \mapsto f(x, y)$ est mesurable.
2. Pour μ -presque tout $x \in X$, $f_x : y \in E \mapsto f(x, y)$ est continue en a .
3. Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que, pour μ -presque tout $x \in X$ et pour tout $y \in E$, $|f(x, y)| \leq g(x)$.

Alors, l'application $F : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{C} \\ y & \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \end{cases}$ est bien définie et continue en a .

Démonstration. Soit $y_n \in E$ telle que $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$. On va montrer que $F(y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F(a)$.

Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à $f_n = f_{y_n}$.

On a ainsi :

$$F(y_n) = \int_X f(x, y_n) d\mu(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_X f(x, a) d\mu(x) = F(a).$$

□

Exemple : Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, on pose $\hat{f}(y) = \int_X f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx$.

Alors $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^n$ et continue sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.25 – Théorème de dérivabilité

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $f : X \times I \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $y \in I$, $f_y : x \in X \mapsto f(x, y)$ est mesurable.
2. Pour μ -presque tout $x \in X$, $f_x : y \in I \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur I .
3. Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que pour μ -presque tout $x \in X$, pour tout $y \in I$, $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq g(x)$.

Alors l'application $F : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{C} \\ y & \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \end{cases}$ est bien définie et dérivable sur I .

De plus, pour tout $y \in I$,

$$F'(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x).$$

Démonstration. Soit $y_0 \in I$. Soit $h_n \in \mathbb{R}$ telle que $h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On va montrer que $\frac{F(y_0 + h_n) - F(y_0)}{h_n}$ converge lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\frac{F(y_0 + h_n) - F(y_0)}{h_n} = \int_X \frac{f(x, y_0 + h_n) - f(x, y_0)}{h_n} d\mu(x).$$

On pose $f_n(x) = \frac{f(x, y_0 + h_n) - f(x, y_0)}{h_n}$ (fonctions mesurables)

D'après le théorème des accroissements finis, pour μ -presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

On obtient ainsi le résultat à l'aide du théorème de convergence dominée :

$$\frac{F(y_0 + h_n) - F(y_0)}{h_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) d\mu(x).$$

□

Exemple : Si $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors l'application

$$F : \begin{cases} [0; +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt \end{cases}$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.

On pose $g(t, x) = f(t) e^{-xt}$. Alors $\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = -t f(t) e^{-xt}$.

On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale sur l'intervalle $I =]a, +\infty[$.

Ainsi, F est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \in [0; +\infty[$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} -t f(t) e^{-xt} dt$.

On prouve ensuite que F' est continue avec le théorème de continuité sous l'intégrale.

Théorème 4.26 – Théorème de différentiabilité

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $B \subset \mathbb{R}^n$ une boule ouverte. Soit $f : X \times B \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $y \in B$, $f_y : x \in X \mapsto f(x, y)$ est mesurable.
2. Pour μ -presque tout $x \in X$, $f_x : y \in B \mapsto f(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur B .
3. Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, pour tous $j_1 + \dots + j_n = j$, pour μ -presque tout $x \in X$ et tout $y \in B$,

$$\left| \frac{\partial^j f}{\partial^{j_1} y_1 \dots \partial^{j_n} y_n}(x, y) \right| \leq g(x).$$

Alors, l'application $F : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{C} \\ y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \end{cases}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^k$ sur I . De plus,

$$\frac{\partial^j F}{\partial^{j_1} y_1 \dots \partial^{j_n} y_n}(y) = \int_X \frac{\partial^j f}{\partial^{j_1} y_1 \dots \partial^{j_n} y_n}(x, y) d\mu(x).$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence, en remarquant qu'une application est de classe $\mathcal{C}^k$ si, et seulement si, toutes ses dérivées partielles d'ordre k existe et sont continues. $\square$

6 Théorème de transfert**Théorème 4.27 – Transfert**

Soient $h : X \rightarrow Y$ une application mesurable où $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré et $(Y, \mathcal{N})$ est un espace mesurable. On munit Y de la mesure $h_*\mu$.

- Pour toute fonction $f : Y \rightarrow [0; +\infty]$ mesurable,

$$\int_Y f d(h_*\mu) = \int_X f \circ h d\mu.$$

- Pour toute fonction $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$, f est $h_*\mu$ intégrable si, et seulement si $f \circ h$ est μ -intégrable.

Dans ce cas,

$$\int_Y f d(h_*\mu) = \int_X f \circ h d\mu.$$

Démonstration. — Si $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{N}$.

On a $h^{-1}(A) = (f \circ h)^{-1}(Y)$.

$$\int_Y f d(h_*\mu) = h_*\mu(A) = \mu(h^{-1}(A)) = \int_X \mathbb{1}_{h^{-1}(A)} d\mu = \int_X (\mathbb{1}_A \circ h) d\mu.$$

- Si f est une fonction étagée mesurable, on montre le résultat par linéarité.
- Si $f : Y \rightarrow [0; +\infty]$ est mesurable, on considère (φ_n) une suite croissante de fonctions étagées mesurables et positives qui converge vers f .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \int_Y \varphi_n d(h_*\mu) = \int_X \varphi_n \circ h d\mu.$$

Par le théorème de convergence monotone, $\int_Y f d(h_*\mu) = \int_X f \circ h d\mu$.

- Si $f : Y \longrightarrow \mathbb{C}$, on a $\int_Y |f| d(h_*\mu) = \int_X |f \circ h| d\mu$. L'équivalence est donc démontrée.
l'égalité s'obtient ensuite en décomposant f avec $\operatorname{Re}(f)^+$, $\operatorname{Re}(f)^-$, $\operatorname{Im}(f)^+$ et $\operatorname{Im}(f)^-$. $\square$

Application en probabilités :

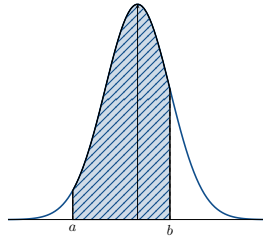
Soit $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Déterminer l'espérance de X .

- $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ est un espace mesuré tel que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- X est une application mesurable.
- Si $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \in \mathbb{R}^+$, on a $X_*\mathbb{P} = g \cdot d\lambda$ ($X_*\mathbb{P}$ est la mesure de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue λ). On note souvent $X_*\mathbb{P} = \mathbb{P}_X$.
Cela signifie que pour $a < b$,

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(X^{-1}([a, b])) = X_*\mathbb{P}([a, b]) = \int_{[a, b]} g \cdot d\lambda.$$



$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\Omega} X d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} (f \circ X) d\mathbb{P} \quad \text{avec } f : x \longmapsto x \\ &= \int_{\mathbb{R}} f d(X_*\mathbb{P}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

Chapitre 5

Espaces mesurées produits et intégration

On commence par définir la notion de tribu produit et d'en énoncer un certain nombre de propriétés. Ensuite, dans l'objectif de définir la mesure produit, on généralisera ce qui a été fait avec la mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$. L'existence d'une mesure produit sera alors vue comme une conséquence de ces résultats. La dernière partie, avec les théorèmes de Tonelli et de Fubini sera enfin très utile pour intégrer des fonctions définies sur des espaces produits.

1 Tribu produit

Définition 5.1

Soient $(X_1, \mathcal{M}_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2)$ deux espaces mesurables.

La tribu produit $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ est la tribu sur $X_1 \times X_2$ engendrée par $\{A \times B, A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2\}$.

Remarque : c'est la plus petite tribu telles que les projections $p_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ et $p_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ soient mesurables.

Proposition 5.1

Soit $f : X \rightarrow Y_1 \times Y_2$ où $Y_1 \times Y_2$ est muni de la tribu $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$. Alors f est mesurable si, et seulement si, $f_1 = p_1 \circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$ sont mesurables.

Proposition 5.2

Soient (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) deux espaces topologiques à base dénombrable d'ouverts. On note $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$ la topologie produit de τ_1 et de τ_2 , $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les tribus boréliennes associées à τ_1 et τ_2 et enfin $\mathcal{B}$ la tribu borélienne associée à τ . Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

Remarque. En général, sans l'hypothèse que les topologies sont à base dénombrable d'ouverts, on a seulement $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$.

Démonstration.

- Montrons que $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$.
 Montrons que pour tous $M_1 \in \mathcal{B}_1$ et $M_2 \in \mathcal{B}_2$, on a $M_1 \times M_2 \in \mathcal{B}$.
 On sait que pour tous $O_1 \in \tau_1$, $O_2 \in \tau_2$, $O_1 \times O_2 \in \mathcal{B}$.
 Soit $O_1 \in \tau_1$. $\{O_1 \times O_2, O_2 \in \tau_2\} \subset \mathcal{B}$.
 Donc $\{E_1 \times M_2, E_1 \in \{\emptyset, O_1, O_1^c, X_1\}, M_2 \in \mathcal{B}_2\} \subset \mathcal{B}$.
 Soit $M_2 \in \mathcal{B}_2$.
 $\{O_1 \times M_2, O_1 \in \tau_1\} \subset \mathcal{B}$
 $\{M_1 \times M_2, M_1 \in \mathcal{B}_1\} \subset \mathcal{B}$.
- Réciproquement, supposons que τ_1 et τ_2 sont à bases dénombrables d'ouverts et montrons que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.
 On remarque que si $\mathcal{A}_i$ est une base de la topologie τ_i , elle engendre aussi la tribu $\mathcal{B}_i$.
 Par conséquent, $\{O_1 \times O_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\}$ engendre $\mathcal{B}$.
 Il suffit alors de voir que $\{O_1 \times O_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\} \subset \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

□

Corollaire 5.3

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Remarque. En identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2 : f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est mesurable si, et seulement si, $Re(f)$ et $Im(f)$ sont mesurables.

Définition 5.2

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles non vides où X_i est muni de la tribu $\mathcal{M}_i$. La tribu $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i$ sur $\prod_{i \in I} X_i$ est la tribu engendrée par $\{p_i^{-1}(E_i), E_i \in \mathcal{M}_i\}$. C'est la plus petite tribu qui rend mesurable les projections p_i .

Proposition 5.4

Si I est dénombrable, $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i$ est engendrée par l'ensemble $\{\prod_{i \in I} E_i, E_i \in \mathcal{M}_i\}$.

Proposition 5.5

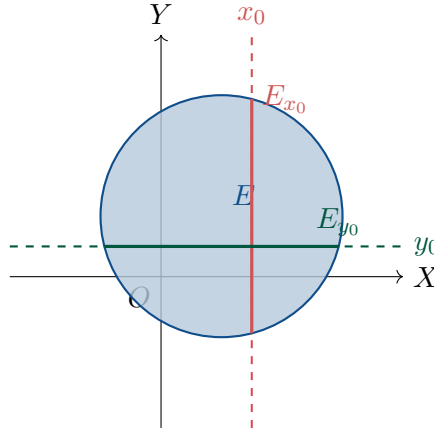
- Si pour tout $i \in I$, $M_i = \sigma(\mathcal{E}_i)$, alors $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i$ est engendrée par $\{p_i^{-1}(E_i), E_i \in \mathcal{E}_i\}$.
- Si I est dénombrable, $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{M}_i$ est engendrée par $\{\prod_{i \in I} E_i, E_i \in \mathcal{E}_i\}$.

2 Applications mesurables sur un espace mesuré produit

Définition 5.3 – Tranches d'un sous ensemble mesurable

Soit $E \subset X \times Y$. Pour $x \in X$ et $y \in Y$, on note

$$E_x = \{y \in Y, (x, y) \in E\} \quad \text{et} \quad E_y = \{x \in X, (x, y) \in E\}.$$

**Définition 5.4 – Applications partielles**

Soit f définie sur $X \times Y$. On note

$$f_x : y \in Y \mapsto f(x, y) \quad \text{et} \quad f_y : x \in X \mapsto f(x, y).$$

Proposition 5.6

Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables et soient $x \in X$ et $y \in Y$.

- Si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, alors $E_x \in \mathcal{N}$ et $E_y \in \mathcal{M}$.
- Si $(Z, \mathcal{P})$ est un espace mesurable et $f : X \times Y \rightarrow Z$ est une application mesurable, alors f_x et f_y sont mesurables.

Remarque : Les réciproques sont fausses.

Démonstration. — Soit $\mathcal{R} = \{E \subset X \times Y ; E_x \in \mathcal{N}, E_y \in \mathcal{M}, \forall x \in X, \forall y \in Y\}$.

On veut montrer que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{R}$.

Si $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$, $A \times B \in \mathcal{R}$ car pour tout $x \in X$, $(A \times B)_x = B$ ou $\emptyset$.

Ainsi, $\mathcal{R}$ contient tous les pavés mesurables.

De plus, $\mathcal{R}$ est une tribu.

Si $E_n \in \mathcal{R}$, $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \in \mathcal{R}$ car $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n)_x$

Si $E \in \mathcal{R}$, alors $E^c \in \mathcal{R}$ car $(E^c)_x = (E_x)^c$.

- Soit $F \in \mathcal{P}$ et $x \in X$.

On a $(f_x)^{-1}(F) = \{y \in Y ; f(x, y) \in F\} = (f^{-1}(F))_x \in \mathcal{N}$.

□

3 Mesure produit

Théorème 5.7 – Sommation par tranches

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ des espaces mesurés σ -finis et soit $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Alors les fonctions $x \in X \mapsto \nu(E_x)$ et $y \in Y \mapsto \mu(E_y)$ sont mesurables (à valeurs dans $[0; +\infty]$), et on a :

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y).$$

Démonstration. On suppose $\mu(X) < \infty$ et $\nu(Y) < \infty$.

On va utiliser le lemme de la classe monotone.

On considère l'algèbre $\mathcal{A}$ des réunions finies disjointes de pavés mesurables (il s'agit bien d'une algèbre : à vérifier).

On a ainsi $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{A})$.

En notant $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ pour lesquelles la propriété annoncée est vérifiée, on voit qu'il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{A}$. Le lemme de la classe monotone permettra alors immédiatement de conclure que $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{A})$.

— D'une part, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$.

En effet, si $E = A \times B$, alors $\nu(E_x) = \mathbb{1}_A(x)\nu(B)$. On en déduit que $x \mapsto \nu(E_x)$ est bien mesurable sur $(X, \mathcal{M})$ et que

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \mu(A)\nu(B) = \mu \otimes \nu(A \times B).$$

On raisonne ensuite de même pour $y \mapsto \mu(E_y)$.

On a ainsi montré que tous les pavés mesurables appartiennent à $\mathcal{A}$ et on en déduit facilement qu'il en va de même pour les réunions finies disjointes de pavés mesurables.

— D'autre part, $\mathcal{C}$ est une classe monotone.

En effet, soit $(E_n) \subset \mathcal{C}$ une suite croissante. Montrons que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$.

Par hypothèse, les fonctions $g_n : x \mapsto \nu((E_n)_x)$ et $h_n : y \mapsto \mu((E_n)_y)$ sont mesurables et

$$\int_X g_n d\mu = \int_Y h_n d\nu = \mu \otimes \nu(E_n).$$

Les suites de fonctions g_n et h_n sont croissantes et convergent simplement vers $g : x \mapsto \nu(E_x)$ et $h : y \mapsto \mu(E_y)$. D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que g et h sont mesurables et que

$$\int_X g d\mu = \int_Y h d\nu,$$

n Soit maintenant une suite $(E_n) \subset \mathcal{C}$ décroissante. Montrons que $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$. Les

fonctions g_n définies comme précédemment vérifient $|g_n(x)| \leq \nu(Y)$ pour tout $x \in X$. La suite g_n converge de plus vers $g : x \mapsto \nu(E_x)$. On raisonne de même pour h_n . On conclut alors à l'aide du théorème de convergence dominée que :

$$\int_X g d\mu = \int_Y h d\nu.$$

On suppose enfin que X et Y sont σ -finis.

On écrit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ et $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ où les X_n et Y_n sont de mesure finies. On peut de plus supposer que ces suites sont croissantes.

□

Définition 5.5 – Mesure produit

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ des espaces mesurés σ -finis. On pose

$$\mu \otimes \nu : \begin{cases} \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} & \longrightarrow & [0; +\infty] \\ E & \longmapsto & \mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y) \end{cases}.$$

Ainsi, $\mu \otimes \nu$ est une mesure sur $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, appelée mesure produit.

Démonstration. Le fait que $\mu \otimes \nu$ est bien une mesure résulte d'une simple application du théorème de convergence monotone. □

Proposition 5.8

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ des espaces mesurés σ -finis. La mesure produit est l'unique mesure λ sur $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$,

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Démonstration. Il est clair que $\mu \otimes \nu$ vérifie la propriété souhaitée.

Soient maintenant λ_1 et λ_2 deux mesures sur $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ vérifiant la propriété.

On suppose dans un premier temps que λ_1 et λ_2 sont des mesures finies. Elles coïncident sur les pavés mesurables donc sur toutes les réunions finies disjointes de pavés mesurables (on note $\mathcal{A}$ cet ensemble qui est une algèbre). On considère ensuite $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}; \lambda_1(E) = \lambda_2(E)\}$. On montre que $\mathcal{C}$ est une classe monotone et on conclut grâce au lemme de la classe monotone. Le cas général, où λ_1 et λ_2 sont σ -finies s'en déduit ensuite en décomposant X et Y comme réunion d'ensembles sur lesquels les mesures induites sont finies. $\square$

Remarque. Dans le cas où X et Y ne sont pas σ -finies, il est possible de montrer qu'il existe une mesure sur $X \times Y$ vérifiant $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Cependant, il n'y a pas unicité d'une telle mesure, interdisant ainsi de parler de **la mesure produit**. L'existence de telles mesures est établie en annexe.

4 Théorèmes de Tonelli et Fubini

Théorème 5.9 – Tonelli

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ des espaces mesurés σ -finis.

Soit $f : X \times Y \rightarrow [0; +\infty]$ une fonction $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ -mesurable.

Alors, pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, les fonctions f_x et f_y sont mesurables.

De plus, pour tout $x \in X$, on pose $g(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y)$ et pour tout $y \in Y$, on pose

$h(y) = \int_X f_y(x) d\mu(x)$. Alors,

- g est $\mathcal{M}$ -mesurable et h est ν -mesurable.
- $\int_X g d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y h d\nu$.

Remarque. L'égalité s'écrit aussi :

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Démonstration. La mesurabilité des fonctions f_x et f_y a déjà été démontrée.

Si $f = \mathbb{1}_E$ où $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, le résultat est vérifié d'après le théorème de sommation par tranches et la définition de la mesure produit. Le résultat est donc également vrai pour toute fonction étagée mesurable positive.

Soit maintenant $f : X \times Y \rightarrow [0; +\infty]$. Il existe une suite croissante (f_n) de fonctions étagées mesurables et positives qui converge vers f .

On pose $g_n(x) = \int_Y f_n(x, y) d\nu(y)$ et $h_n(y) = \int_X f_n(x, y) d\mu(x)$. Les fonctions g_n et h_n sont ainsi mesurables et vérifient

$$\int_X g_n d\mu = \int_{X \times Y} f_n d\mu \otimes \nu = \int_Y h_n d\nu.$$

Les suites (g_n) et (h_n) sont croissantes et, d'après le théorème de convergence monotone, convergent simplement vers g et h .

En utilisant de nouveau le théorème de convergence monotone, on obtient le fait que g et h sont mesurables et que :

$$\int_X g d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y h d\nu.$$

□

Théorème 5.10 – Fubini

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ des espaces mesurés σ -finis.

Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mu \otimes \nu$ -intégrable.

Alors, pour μ presque tout $x \in X$ et ν presque tout $y \in Y$, les fonctions f_x et f_y sont intégrables.

De plus, on définit la fonction g μ -presque partout par $g(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y)$ et la

fonction h ν -presque partout par $h(y) = \int_X f_y(x) d\mu(x)$. Alors,

— g est $\mathcal{M}$ -intégrable et h est $\mathcal{N}$ -intégrable.

— $\int_X g d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y h d\nu$.

Remarque.

- En pratique, on commence souvent par montrer qu'une fonction est intégrable en utilisant le théorème de Tonelli avant d'appliquer le théorème de Fubini.
- Implicitement, les fonctions g et h sont prolongées « partout » en imposant la valeur 0 là où elles ne sont pas définies.
- Le théorème de Fubini s'applique typiquement pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ munie de la tribu des Boréliens car on a alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En revanche, la tribu de Lebesgue n'est pas égale à la tribu produit. On a bien $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}_L(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^2)$ mais on n'a pas l'égalité. Par conséquent, lorsqu'on considère des fonctions Lebesgue-intégrable, si l'on veut appliquer le théorème de Tonelli ou de Fubini, il faut alors considérer un représentant de cette fonction qui soit mesurable relativement à la tribu des boréliens. Un tel représentant existe toujours : pour le prouver, on commence par le montrer pour les fonctions étagées puis on généralise le résultat par convergence.

Démonstration. Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mu \otimes \nu$ -intégrable.

f est mesurable donc il en va de même des applications partielles. De plus, le théorème de Tonelli appliqué à $|f|$ implique que :

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f| d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

On a donc, d'après la proposition 4.10, $\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) < +\infty$ pour μ -presque tout $x \in X$ (idem pour l'autre application partielle).

On pose $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ lorsque cela a un sens et $g(x) = 0$ sinon. De même, on pose

$h(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ lorsque cela a un sens et $h(y) = 0$ sinon (g et h sont mesurables).

De plus, on déduit de l'égalité précédente et de l'inégalité triangulaire que g et h sont bien intégrables.

Enfin, l'égalité $\int_X g d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y h d\nu$ s'obtient en appliquant le théorème de Tonelli aux fonctions mesurables positives $(\operatorname{Re} f)_+$, $(\operatorname{Re} f)_-$, $(\operatorname{Im} f)_+$ et $(\operatorname{Im} f)_-$. □

Chapitre 6

Cas particulier de l'intégrale de Lebesgue par rapport à la mesure de Lebesgue

1 Distinction entre $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et conséquences

Rappels :

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n)$ est la tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et tous les ensembles de mesure extérieure nulle.
- Les ensembles de mesure extérieure nulle sont exactement les ensembles négligeables de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$. Autrement dit, pour $N \subset \mathbb{R}^n$:

$$\lambda^*(N) = 0 \iff \exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } N \subset A \text{ et } \lambda(A) = 0.$$

En effet, soit $N \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda^*(N) = 0$. Pour tout $k \geq 1$, il existe O_k ouvert contenant N tel que $\lambda^*(O_k \setminus N) \leq \frac{1}{k}$.

Alors $N \subset \bigcap_{k \geq 1} O_k$ et $\lambda(\bigcap_{k \geq 1} O_k) = 0$.

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n)$, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et N négligeable tels que $A = B \cup N$.

Proposition 6.1

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n), \lambda)$. Soit $Y = [0; +\infty]$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ avec $f = g \lambda - p.p.$

Alors f est mesurable si, et seulement si, g est mesurable.

En particulier si $h : X \rightarrow Y$ est nulle $\lambda - p.p.$, alors h est mesurable.

Démonstration. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ avec $f = g \lambda - p.p.$

Supposons que f est mesurable et soit $N \in \mathcal{M}$ tel que $\lambda(N) = 0$ et tel que pour tout $x \in N^c$, $f(x) = g(x)$.

Montrons que g est mesurable.

Soit $A \in \mathcal{B}(Y)$. Alors,

$$g^{-1}(A) = (g^{-1}(A) \cap N) \cup (g^{-1}(A) \cap N^c) = (g^{-1}(A) \cap N) \cup (f^{-1}(A) \cap N^c) \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n).$$

□

Proposition 6.2

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n), \lambda)$. Soit $Y = [0; +\infty], \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ avec $f = g \mu - p.p.$

Alors f est intégrable si, et seulement si, g est intégrable.

Dans ce cas, on a $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

Démonstration. Supposons que f est intégrable.

f est en particulier mesurable donc g est également mesurable.

La fonction mesurable positive $|g - f|$ est nulle presque partout donc $g = f + (g - f)$ est intégrable. De plus,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (g - f) d\lambda \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g - f| d\lambda = 0.$$

□

Proposition 6.3

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n), \lambda)$. Soit $Y = [0; +\infty], \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ une suite de fonctions mesurables. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ est une fonction mesurable telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \lambda - p.p.$, alors f est mesurable.

Démonstration. Soit $N \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n)$ tel que $\lambda(N) = 0$ et tel que pour tout $x \in N^c$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Alors $g_n = f_n \mathbb{1}_{N^c}$ est mesurable d'après le lemme précédent.

Elle converge vers $f \mathbb{1}_{N^c}$ qui est donc Lebesgue-mesurable.

Par conséquent, f est également Lebesgue-mesurable d'après la première proposition. □

2 Lien entre intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue

Proposition 6.4

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Alors f est Lebesgue-intégrable sur $[a, b]$ et on a :

$$\int_{[a, b]} f d\lambda = \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable.

On pose $\alpha_i = a + i \frac{b-a}{2^n}$ (pour $i \in \{0, \dots, 2^n\}$).

On pose aussi $m_i = \inf_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}]} f$ et $M_i = \sup_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}]} f$.

En notant $\varphi_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i \mathbb{1}_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$ et $\psi_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} M_i \mathbb{1}_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$, on a

$$\left| \int_a^b \varphi_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b \psi_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, (φ_n) est une suite croissante et (ψ_n) est une suite décroissante de fonctions en escaliers.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \leq f \leq \psi$.

On a de plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n dt = \int_a^b f(t) dt$.

Enfin, par monotonie, ces suites convergent : on note φ et ψ leur limite (ce sont des fonctions boréliennes).

D'après le théorème de convergence dominée, φ et ψ sont Lebesgue-intégrables et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n dt =$

$$\int_{[a,b]} \varphi d\lambda \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n dt = \int_{[a,b]} \psi d\lambda.$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} \varphi d\lambda = \int_{[a,b]} \psi d\lambda$$

avec $\varphi \leq f \leq \psi$. On a donc $\int_{[a,b]} \psi - \varphi d\lambda = 0$.

On en déduit que $\psi - \varphi = 0$ $\mu - p.p.$ et donc que $f = \varphi = \psi$ $\mu - p.p.$.

Par conséquent, f est Lebesgue-intégrable et on a

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(t) dt.$$

Le cas de fonctions Riemann intégrable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se traite de la même façon en travaillant avec $Re(f)$ et $Im(f)$. $\square$

Proposition 6.5

Soit $a < b \leq +\infty$ et soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ localement Riemann-intégrable sur $[a, b[$. Alors f est Lebesgue-mesurable.

De plus, f est Lebesgue-intégrable sur $[a, b[$ si, et seulement si, l'intégrale de Riemann généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente.

Dans ce cas,

$$\int_{[a,b[} f d\lambda = \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. Par définition, $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$.

Soit (x_n) une suite croissante de $[a, b[$ qui converge vers b .

On pose $f_n = \mathbb{1}_{[a, x_n]}$. La mesurabilité de $f|_{[a, x_n]}$ entraîne la mesurabilité de f_n .

Comme f est limite simple de (f_n) , on en déduit que f est Lebesgue-mesurable.

De plus, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b[} |f| d\lambda &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b[} |f_n| d\lambda \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, x_n]} |f| d\lambda \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{x_n} |f(t)| dt \end{aligned}$$

On en déduit que f est Lebesgue-intégrable sur $[a, b[$ si, et seulement si, l'intégrale de Riemann généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente.

Enfin, comme $|f_n| \leq |f|$, on a, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b[} f d\lambda &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b[} f_n d\lambda \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{x_n} f(t) dt \\ &= \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

□

Remarque : Attention à ne pas faire de confusion.

- La fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est localement Riemann-intégrable sur $[0; +\infty[$.
- L'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.
- En revanche, cette intégrale généralisée n'est pas absolument convergente donc f n'est pas Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

3 Théorème de changement de variables

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$.

On munit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de leur tribus de Lebesgue $\mathcal{M}_L(\mathcal{U})$ et $\mathcal{M}_L(\mathcal{V})$ ainsi que des mesures de Lebesgue $\lambda_{\mathcal{U}}$ et $\lambda_{\mathcal{V}}$.

Objectif : Exprimer $\int_{\mathcal{V}} f d\lambda_{\mathcal{V}}$ avec une intégrale sur $\mathcal{U}$ de la fonction $f \circ \varphi$.

Idée : Si $\varphi_*\mu = \lambda_{\mathcal{V}}$, on a

$$\int_{\varphi(\mathcal{U})} f d\lambda_{\varphi(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} f \circ \varphi d\mu.$$

Il suffit de prendre $\mu = (\varphi^{-1})_*\lambda_{\varphi(\mathcal{U})}$.

Si φ est linéaire, pour tout $A \in \mathcal{M}_L(\mathcal{U})$, $\lambda_{\mathcal{V}}(\varphi(A)) = |\det(\varphi)|\lambda_{\mathcal{U}}(A)$, soit $(\varphi^{-1})_*(\lambda_{\varphi(\mathcal{U})})(A) = |\det(\varphi)|\lambda_{\mathcal{U}}(A)$.

$$\int_{\varphi(\mathcal{U})} f d\lambda_{\varphi(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} f \circ \varphi |\det(\varphi)| d\lambda_{\mathcal{U}}.$$

On a ainsi vu que le résultat que l'on cherche fait intervenir des mesures à densité et des mesures images. Cela motive l'énoncé du lemme suivant.

Lemme 6.6

oit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $h : X \rightarrow [0; +\infty]$ une fonction mesurable positive. Soit $(Y, \mathcal{N})$ un espace mesurable et $\psi : X \rightarrow Y$ une fonction mesurable et bijective. Alors,

$$\psi_*(h \cdot \mu) = (h \circ \psi^{-1}) \cdot (\psi_*\mu).$$

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{N}$. On a, d'après le théorème de transfert :

$$\left((h \circ \psi^{-1}) \cdot (\psi_*\mu) \right) (B) = \int_B (h \circ \psi^{-1}) d(\psi_*\mu) = \int_{\psi^{-1}(B)} (h \circ \psi^{-1} \circ \psi) d\mu.$$

Donc

$$\left((h \circ \psi^{-1}) \cdot (\psi_*\mu) \right) (B) = (h \cdot \mu)(\psi^{-1}(B)) = \psi_*(h \cdot \mu)(B).$$

□

Proposition 6.7

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Pour toute partie Lebesgue mesurable $A \subset \mathcal{U}$, $\varphi(A)$ est une partie Lebesgue mesurable de $\varphi(\mathcal{U})$. De plus,

$$\lambda_{\varphi(\mathcal{U})}(\varphi(A)) = \int_A |\det(\varphi'(x))| d\lambda_{\mathcal{U}}(x).$$

Autrement dit,

$$(\varphi^{-1})_*(\lambda_{\varphi(\mathcal{U})}) = |\det \varphi'| \cdot \lambda_{\mathcal{U}}.$$

Démonstration. admise □

Il résulte alors de la proposition 6.7 et du théorème de transfert le théorème suivant.

Théorème 6.8 – Changement de variables

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

— Pour toute fonction $f : \mathcal{V} \rightarrow [0; +\infty]$ Lebesgue mesurable, on a

$$\int_{\mathcal{V}} f d\lambda_{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{U}} (f \circ \varphi) |\det \varphi'| d\lambda_{\mathcal{U}}.$$

— Une fonction $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ est $\lambda_{\mathcal{V}}$ -intégrable si, et seulement si, $(f \circ \varphi) |\det \varphi'|$ est $\lambda_{\mathcal{U}}$ -intégrable. Dans ce cas, on a

$$\int_{\mathcal{V}} f d\lambda_{\mathcal{V}} = \int_{\mathcal{U}} (f \circ \varphi) |\det \varphi'| d\lambda_{\mathcal{U}}.$$

Annexes

1 Mesure extérieure et application aux espaces produits

Définition .1 – Mesure extérieure

On appelle mesure extérieure une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0; +\infty]$ telle que :

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- $E_1 \subset E_2 \implies \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$
- Pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \geq 0} \mu^*(A_n)$.

Exemple : la mesure extérieure introduite au chapitre 1 est une mesure extérieure au sens de cette définition.

Définition .2

Si μ^* est une mesure extérieure, on dit que A est Carathéodory-mesurable si

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

- Pour montrer qu'un ensemble $A \subset X$ est Carathéodory-mesurable, il suffit de montrer que

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

- $\emptyset$ et X sont Carathéodory-mesurables.
- Tous les ensembles $A \subset X$ tels que $\mu^*(A) = 0$ sont Carathéodory-mesurables.
- Si A est Carathéodory-mesurable, alors A^c est Carathéodory-mesurable.

Théorème .9 – Carathéodory

Soit X muni d'une mesure extérieure μ^* . L'ensemble $\mathcal{M}^*$ des parties Carathéodory-mesurables est une tribu et $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*|_{\mathcal{M}^*})$ est un espace mesuré complet.

Démonstration.

- $\mathcal{M}^*$ stable par réunion finie.
Soient $A, B \in \mathcal{M}^*$ et $E \in \mathcal{P}(X)$.

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \end{aligned}$$

en remarquant que $A \cup B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

- μ^* est finiment additive sur $\mathcal{M}^*$.
Soient $A, B \in \mathcal{M}^*$ disjointes.

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

- $\mathcal{M}^*$ est stable par réunion dénombrable.
Soient $(A_n) \subset \mathcal{M}^*$ une suite d'ensembles deux à deux disjointes.
On montre par récurrence sur $n \geq 0$ que

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad \mu^*(E) = \sum_{i=0}^n \mu^*(E \cap A_i) + \mu^* \left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c \right).$$

On en déduit que pour tout $n \geq 0$,

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad \mu^*(E) \geq \sum_{i=0}^n \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)^c\right).$$

Ainsi,

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad \mu^*(E) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)^c\right)$$

et on a donc :

$$\forall E \in \mathcal{P}(X), \quad \mu^*(E) \geq \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)\right) + \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)^c\right)$$

Si les A_n ne sont pas deux à deux disjoints, on pose $B_n = \bigcup_{i=0}^n A_i$ puis $C_n = B_n \setminus B_{n-1}$.
On a alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ et les C_n sont deux à deux disjoints.

— μ^* est une mesure :

$$\mu^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i).$$

□

Définition .3 – Prém mesure

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une algèbre. On appelle prém mesure une application $\rho : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que :

- $\rho(\emptyset) = 0$
- $\rho\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(A_n)$ pour toutes $A_n \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints.

Si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des réunions finies de pavés mesurables de $\mathbb{R}^n$: c'est une algèbre !
De plus, le volume est une prém mesure.

Proposition .10

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une algèbre. et $\rho : \mathcal{A} \rightarrow [0; +\infty]$ une prém mesure.

On définit l'application μ^* sur $\mathcal{P}(X)$ de la façon suivante :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho(E_k) \mid \forall k \in \mathbb{N}, E_k \in \mathcal{A} \text{ et } A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right\}.$$

Alors :

- μ^* est une mesure extérieure ;
- Pour tout $E \in \mathcal{A}$, $\mu^*(E) = \rho(E)$
- Tout ensemble $E \in \mathcal{A}$ est Carathéodory-mesurable ;
- $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu^*_{|\sigma(\mathcal{A})})$ est un espace mesuré ;
- Si X est σ -fini (pour la prém mesure ρ), le prolongement à $\sigma(\mathcal{A})$ est unique.

Démonstration.

- μ^* est une mesure extérieure.
- Soit $E \in \mathcal{A}$. On a clairement $\mu^*(E) \leq \rho(E)$.
De plus, soit $E \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$.

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E \cap E_k \text{ donc } \rho(E) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho(E \cap E_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho(E_k).$$

On en déduit que $\rho(E) \leq \mu^*(E)$.

— Soit $E \in \mathcal{A}$. On va montrer que E est Carathéodory-mesurable.

Soit $F \in \mathcal{P}(X)$. Soit $\epsilon > 0$.

Il existe $F \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ tels que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \rho(B_i) \leq \mu^*(F) + \epsilon$.

Alors,

$$\mu^*(F) + \epsilon \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho(B_i) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho(B_i \cap E) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho(B_i \cap E^c) \geq \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap E^c).$$

— $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu^*_{|\sigma(\mathcal{A})})$ est un espace mesuré d'après Carathéodory (on a $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}^*$).

— Supposons que X est σ -fini, c'est-à-dire que $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ avec $A_i \in \mathcal{A}$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\rho(A_i) < +\infty.$$

On considère μ et ν deux mesures prolongeant ρ à $\sigma(\mathcal{A})$. Soit $E \in \sigma(\mathcal{A})$.

$$\mu(E) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i \cap E) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(A_i \cap E) = \nu(E).$$

On veut montrer que pour tout $E \in \sigma(\mathcal{A})$, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mu(E \cap A_i) = \nu(E \cap A_i).$$

On considère $\mathcal{N}$ l'ensemble des $E \in \sigma(\mathcal{A})$ vérifiant cette propriété. On a $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}$ est une classe monotone :

Si $E_n \subset E_{n+1}$, avec $\mu(E_n) = \nu(E_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n)$ et $\nu(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(E_n)$, donc $\mu(E) = \nu(E)$.

Idem pour une suite décroissante. Conclusion : $CM(\mathcal{A}) \subset \mathcal{N}$ et, par le lemme de la classe monotone :

$$\sigma(\mathcal{A}) = CM(\mathcal{A}) \subset \mathcal{N}.$$

□

Proposition .11

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés. Il existe une mesure λ sur $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ telle que $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

De plus, si μ et ν sont σ -finies, alors cette mesure est unique. On la note $\mu \otimes \nu$.

Conséquence : une fois construite la mesure de Lebesgue $\lambda_{\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, il existe une unique mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ telle que la mesure de $A \times B$ soit $\lambda_{\mathbb{R}}(A) \times \lambda_{\mathbb{R}}(B)$

Démonstration. On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des réunions disjointes et finies de pavés mesurables. $\mathcal{A}$ est une algèbre. De plus, si $E = \bigcup_{i=1}^N A_i \times B_i$, on pose $\zeta(E) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i)\nu(B_i)$. ζ est bien définie d'après le lemme .12 ci-dessous.

En effet, supposons que $E = \bigcup_{i=1}^N A_i \times B_i = \bigcup_{j=1}^M C_j \times D_j$. Soit $j \in \{1; \dots; M\}$,

$$C_j \times D_j = (C_j \times D_j) \cap \left(\bigcup_{i=1}^N A_i \times B_i \right) = \bigcup_{i=1}^N (A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)$$

$$\text{Donc } \mu(C_j)\nu(D_j) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i \cap C_j)\nu(B_i \cap D_j)$$

$$\text{Donc } \sum_{j=1}^M \mu(C_j)\nu(D_j) = \sum_{i,j} \mu(A_i \cap C_j)\nu(B_i \cap D_j) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i)\nu(B_i).$$

Ainsi, ζ est une prémesure sur $\mathcal{A}$.

Elle induit une mesure extérieure. Sa restriction à $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est une mesure λ qui prolonge ζ . $\square$

Lemme .12

$$\text{Si } A \times B = \bigcup_{i=1}^N A_i \times B_i, \text{ on a } \mu(A)\nu(B) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i)\nu(B_i).$$

Démonstration. (du lemme)

Pour tous $x \in X, y \in Y$:

$$\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y) = \mathbb{1}_{A \times B}(x, y) = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_i \times B_i}(x, y) = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_i}(x)\mathbb{1}_{B_i}(y).$$

On intègre par rapport à x :

$$\forall y \in Y, \quad \mu(A)\mathbb{1}_B(y) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i)\mathbb{1}_{B_i}(y).$$

On intègre enfin par rapport à y :

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i)\nu(B_i).$$

$\square$

2 Théorème de Radon-Nikodym

Définition – Absolue continuité

Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$.

On dit que ν est absolument continue par rapport à μ , et on note $\nu \ll \mu$, si pour tout $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) = 0$, on a $\nu(E) = 0$.

L'objectif est de démontrer le théorème suivant faisant le lien entre absolue continuité et mesure à densité.

Théorème – Radon-Nikodym

Soient μ et ν deux mesures σ -finies sur $(X, \mathcal{M})$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- (i) $\nu \ll \mu$
- (ii) Il existe h mesurable (pour la mesure μ) et positive telle que $d\nu = h d\mu$.

Rappel : $d\nu = h d\mu$ signifie : pour tout $A \in \mathcal{M}$, $\nu(A) = \int_A h d\mu$.

Avant cela, nous commençons par expliquer le terme « absolument continue » (avec la proposition suivante) et donnons quelques définitions supplémentaires, notamment celle de mesure étrangère.

Proposition

Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$.

Il y a équivalence entre :

- (i) $\nu \ll \mu$
- (ii) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall E \in \mathcal{M}, \mu(E) < \delta \implies \nu(E) < \epsilon$.

Démonstration. — (ii) $\implies$ (i) : Soit $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) = 0$. Montrons que $\nu(E) = 0$.

Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe δ donné par (ii). On a $\mu(E) < \delta$ et donc $\nu(E) < \epsilon$ d'après (ii).

— (i) $\implies$ (ii) : On va montrer la contraposée.

On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $E_n \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ mais tel que $\nu(E_n) > \epsilon$.

On pose $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k$.

On a $\mu\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et donc $\mu(F) = 0$. De plus, $\nu(F) \geq \epsilon > 0$.

□

Définition

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{M}$. On dit que μ est portée par A si :

$$\forall E \in \mathcal{M}, \mu(E) = \mu(A \cap E).$$

Définition – Mesures étrangères

Soient ν et μ deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$.

On dit que μ et ν sont étrangères et on note $\mu \perp \nu$ s'il existe $A, B \in \mathcal{M}$ disjoints tels que μ est portée par A et ν est portée par B .

On en vient alors à la démonstration du théorème de Radon-Nikodym. On montre en fait une forme un peu plus générale, appelée théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym. Le théorème de Radon-Nikodym précédemment mentionné sera alors obtenu comme un corollaire immédiat.

Théorème – Lebesgue-Radon-Nikodym

Soient μ et ν deux mesures σ -finies sur $(X, \mathcal{M})$.

Il existe un unique couple (ν_1, ν_2) de mesures σ -finies telles que :

- $\nu = \nu_1 + \nu_2$
- $\nu_1 \ll \mu$
- $\nu_2 \perp \mu$

Ceci s'appelle la décomposition de Lebesgue de ν par rapport à μ .

De plus, il existe h mesurable (pour la mesure μ) et positive telle que $d\nu_1 = h d\mu$.

Corollaire – Radon-Nikodym

Soient μ et ν deux mesures σ -finies sur $(X, \mathcal{M})$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- (i) $\nu \ll \mu$
 - (ii) Il existe h mesurable (pour la mesure μ) et positive telle que $d\nu = h d\mu$.
- La fonction h est appelée la dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ .

Démonstration. (du théorème de Lebesgue-RadonNikodym)

On suppose que ν est finie.

- Unicité : Soient $\nu = \nu_1 + \nu_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ deux décompositions.
Alors $\nu_1 - \lambda_1 = \lambda_2 - \nu_2$.
 $\nu_1 - \lambda_1 \ll \mu$. et $\lambda_2 - \nu_2 \perp \mu$.
On en déduit que $\nu_1 = \lambda_1$ et $\nu_2 = \lambda_2$.
- Existence : Le plan de la preuve est le suivant :
 - On pose $\varphi = \nu + \mu$.
 - On considère la forme linéaire $f \in L^2(\varphi) \mapsto \int_X f d\nu$.
 - On utilise le théorème de Riesz : il existe $g \in L^2(\varphi)$ telle que

$$\begin{aligned} \forall f \in L^2(\varphi), \quad \int_X f d\nu &= \int_X f g d\varphi \\ &= \int_X f g d\nu + \int_X f g w d\mu \end{aligned}$$

- On pose $A = \{x \in X; \quad 0 \leq g(x) < 1\}$ et $B = \{x \in X; \quad g(x) = 1\}$,
puis, pour $E \in \mathcal{M}$, $\nu_1(E) = \nu(A \cap E)$ et $\nu_2(E) = \nu(B \cap E)$.

Nous aurons néanmoins besoin des deux lemmes suivants :

Lemme

Soit μ une mesure σ -finie sur $(X, \mathcal{M})$. Il existe une fonction $w \in L^1(\mu)$ telle que $0 < w(x) < 1$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. (du lemme)

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n. \text{ On pose } w_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \frac{1}{1 + \mu(E_n)} & \text{si } x \in E_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

□

Lemme

Soit λ une mesure finie sur $(X, \mathcal{M})$. Soit $f \in L^1(\lambda)$ et soit $S \subset \mathbb{C}$ un ensemble fermé. Si pour tout $E \in \mathcal{M}$ tel que $\lambda(E) > 0$, on a $A_E(f) = \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda \in S$, alors pour λ -presque tout $x \in X$, $f(x) \in S$.

Démonstration. (du lemme)

On veut montrer que $\lambda(f^{-1}(S^c)) = 0$.

S^c est une réunion dénombrable de disques. Il suffit donc de montrer que si $D = D(\alpha, r) \subset S^c$, $\lambda(f^{-1}(D)) = 0$.

On note $E = f^{-1}(D)$.

Supposons par l'absurde que $\lambda(E) > 0$. Alors,

$$|A_E(f) - \alpha| = \frac{1}{\lambda(E)} \left| \int_E (f - \alpha) d\lambda \right| \leq \frac{1}{\lambda(E)} \int_E |f - \alpha| d\lambda \leq r.$$

On a donc, $A_E(f) \in S$ ce qui est absurde.

On en déduit ainsi que $\lambda(E) = 0$. □

On peut maintenant revenir sur la démonstration du théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym.

Démonstration. (de l'existence de la décomposition de Lebesgue)

On suppose que ν est une mesure finie.

On pose $d\varphi = d\nu + wd\mu$.

L'application $f \in L^2(\varphi) \mapsto \int_X f d\nu$ est bien une forme linéaire.

Pour f fonction mesurable positive, $\int_X f d\varphi = \int_X f d\nu + \int_X f w d\mu$.

Si $f \in L^2(\varphi)$,

$$\left| \int_X f d\nu \right| \leq \int_X |f| d\nu \leq \int_X |f| d\varphi \leq \left(\int_X |f|^2 d\varphi \right)^{1/2} (\varphi(X))^{1/2}.$$

D'après le théorème de Riesz, il existe $g \in L^2(\varphi)$ telle que

$$\forall f \in L^2(\varphi), \quad \int_X f d\nu = \int_X f g d\varphi.$$

Pour $E \in \mathcal{M}$ et $f = \mathbb{1}_E$, $\nu(E) = \int_E g d\varphi$.

Comme $0 \leq \nu \leq \varphi$, on a $0 \leq \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g d\varphi \leq 1$.

D'après le lemme, $g(x) \in [0, 1]$ pour φ -presque tout x .

On peut même supposer que $g(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in X$.

On a

$$\forall f \in L^2(\varphi), \quad \int_X (1 - g) f d\nu = \int_X f g w d\mu.$$

On pose $A = \{x \in X; \quad 0 \leq g(x) < 1\}$ et $B = \{x \in X; \quad g(x) = 1\}$,

puis, pour $E \in \mathcal{M}$, $\nu_1(E) = \nu(A \cap E)$ et $\nu_2(E) = \nu(B \cap E)$. Avec $f = \mathbb{1}_B$, on obtient $0 = \int_B w d\mu$.

Comme $w(x) > 0$, on a $\mu(B) = 0$ et donc $\nu_2 \perp \mu$.

Pour $E \in \mathcal{M}$, comme $0 \leq g \leq 1$, on peut remplacer f par $(1 + g + \dots + g^n) \mathbb{1}_E$.

On a

$$\int_E (1 - g^{n+1}) d\nu = \int_E g(1 + g + \dots + g^n) w d\mu.$$

Le membre de gauche converge vers $\lambda(A \cap E) = \nu_1(E)$.

La fonction $g(1 + g + \dots + g^n)w$ converge en croissant vers une fonction positive h . D'après le théorème de convergence monotone, h est mesurable et

$$\nu_1(E) = \int_E h d\mu.$$

Il en résulte de plus que $\nu_1 \ll \mu$.

Supposons que ν est une mesure σ -finie.

On écrit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ avec $\mu(X_n) < \infty$ et $\nu(X_n) < \infty$ (X_n deux à deux disjoints). On pose

$\nu^n(E) = \nu(E \cap X_n)$ et on obtient une décomposition $\nu^n = \nu_1^n + \nu_2^n$.

On obtient finalement le résultat en considérant les sommes.

Dans ce cas, h n'est pas nécessairement intégrable. □