Chapitre 2 – Droites, triangles, cercles

Dans toute la feuille, dans un triangle ABC, on note $\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{AC} = b$, $\mathrm{BC} = a$, $\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{C}}$.

Exercice 1.
Déterminer :

1. Une équation cartésienne de la droite passant par $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}$
2. Une équation cartésienne de la droite passant par $A(1,1)$ et $B(2,4)$
3. Une équation cartésienne de la droite passant par $A(1,1)$ et de vecteur normal $\vec{u}(3,1)$
4. Un paramétrage de la droite passant par $A(1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3,1)$
5. Une équation cartésienne de la droite de paramétrage $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & 2+3t \end{array}\right.$
6. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x+y+1=0$. Donner deux points de $\mathcal{D}$, un vecteur directeur, un vecteur normal et un paramétrage.
7. Une équation normale de la droite passant par $A(2,1)$ et $B(3,-1)$.
8. une équation complexe passant par les points $A(1+i)$ et $B(1-i)$.
9. une équation complexe de la droite d'équation $D : x+3y-5=0$.

Exercice 2.
Déterminer les bissectrices des droites $D_1 : x+2y-4=0$ et $D_2 : 3x+y+5=0$.

Exercice 3.
Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Indication : on pourra considérer les droites parallèles à un côté du triangle et passant par le sommet opposé puis utiliser le fait que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Exercice 4.
Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(2\,;3)$, $B(-1\,;5)$ et $C(4\,;1)$. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C sur (AB).

Exercice 5.
Montrer que trois droites du plan dont les équations cartésiennes sont $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ et $a''x+b''y+c''=0$, sont concourantes ou parallèles si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 6.
Soit $A(0,0)$, $B(1,4)$ et $C(2,3)$.

1. Déterminer le centre de gravité de ABC.
2. Déterminer l'orthocentre de ABC.
3. Déterminer une équation du cercle circonscrit à ABC.
4. Déterminer une équation du cercle inscrit à ABC.

Exercice 7.
Déterminer l'ensemble des centres des cercles qui passent par le point $A(1,0)$ et qui possèdent deux tangentes perpendiculaires qui se coupent en O.

Exercice 8. Triangles isométriques et triangles semblables
On dit que deux triangles sont isométriques si les longueurs de leurs côtés sont égales deux à deux. On dit que deux triangles sont semblables si leurs angles sont égaux deux à deux.

1. Montrer que deux triangles isométriques sont semblables.
2. Montrer que si deux triangles ont un même angle compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont isométriques.
3. Montrer que si deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement égaux, alors ils sont isométriques.
4. Montrer que deux triangles sont semblables si, et seulement si, leurs côtés sont proportionnels.
5. Montrer que deux triangles sont semblables si deux côtés de l'un sont proportionnels à deux côtés de l'autre et si les angles entre ces deux côtés sont égaux.
6. Montrer que deux triangles sont semblables si, et seulement si, deux côtés de l'un sont proportionnels à deux côtés de l'autre et si les angles opposés aux plus grands des deux côtés proportionnels sont égaux

Exercice 9. Vrai ou faux ?

1. La médiatrice de l'hypothénuse d'un triangle rectangle passe par le sommet opposé à l'hypothénuse.
2. La somme des quatres angles d'un quadrilatère non croisé est égale à 360°.
3. Soit ABCD un quadrilatère. ABCD admet un cercle circonscrit si, et seulement si, $\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$.
4. Soit ABC un triangle et O le centre du cercle circonscrit. On a :
$$\widehat{BOC} = 2\widehat{A}$$
5. Soit ABC un triangle et O le centre du cercle circonscrit. On a :
$$\widehat{BIC} = 90° + \frac{1}{2}\widehat{A}$$

Exercice 10.

1. Montrer que, dans tout triangle, les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés appartiennent au cercle circonscrit au triangle.
2. Montrer de plus que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux milieux des côtés appartiennent aussi au cercle circonscrit au triangle.

Exercice 11.
Dans un repère orthonormé, existe-t-il un triangle équilatéral dont les coordonnées des sommets sont des nombres entiers ?

Exercice 12.
Soit ABC un triangle. Le cercle $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_0$) de diamètre $[BC]$ (resp. $[CA]$) coupe la droite (CA) (resp. la droite (BC)) en P (resp. Q). Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$ se recoupent en un second point R. Montrer que (CR), (BP) et (AQ) sont concourantes.

Exercice 13.

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle et M un point à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Montrer que si (MT_1) et (MT_2) sont les deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par M (avec T_1 et T_2 deux points de $\mathcal{C}$), on a $MT_1 = MT_2$.
2. **Théorème de Pitot**
Montrer que si $ABCD$ est un quadrilatère qui admette un cercle inscrit, alors
$$AB + CD = BC + AD$$
3. Soit ABC un triangle et $A' \in [BC]$ le point de tangence du cercle inscrit à ABC avec le côté $[BC]$. Montrer que
$$A'B = \frac{a-b+c}{2}$$

Exercice 14. Formule de Héron
Soit ABC un triangle. On note $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre du triangle. Montrer que l'aire de ABC est (formule de Héron) :
$$\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Exercice 15. Droite d'Euler
Montrer que dans tout triangle ABC, le centre de gravité G, l'orthocentre H et le centre du cercle circonscrit O sont alignés.

Exercice 16. Théorème corde-tangente
Soit ABC un triangle dont le cercle circonscrit est $\mathcal{C}$. Soit T la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Montrer que $\widehat{C}$ est égal à un angle entre (AB) et T.

Exercice 17. Cercle d'Appolonius
Soient A et B deux points du plan. Soit $k > 0$. Déterminer le lieu des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Exercice 18. Théorème de Ptolémée
Soient quatre points distincts A, B, C, D formant (dans cet ordre) un polygone convexe. Montrer qu'ils sont cocycliques si, et seulement si,
$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$$

Exercice 19. Théorème de Miquel
Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ quatre cercles. On suppose que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en A_1 et B_1, que $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent en A_2 et B_2, que $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ se coupent en A_3 et B_3 et que $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ se coupent en A_4 et B_4. On suppose de plus que les huit points d'intersection obtenus sont deux à deux distincts.
Les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, B_1, B_2, B_3 et B_4 sont cocycliques ou alignés.