TD 3 – Arithmétique

1 Divisibilité et congruences

Exercice 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $17^n - 2^n$ est divisible par 5.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n+3$ divise $2n+5$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $4n+3$ soit divisible par $3n+4$.

Exercice 4. Déterminer le reste de la division de 335^{112} par 7.

Exercice 5. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+7)(5n+1)$ est divisible par 3.

Exercice 6. Soit p un nombre premier impair. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que p divise $2^n - 1$.

2 PGCD

Exercice 7. Dans chaque cas, déterminer si a est inversible modulo n et déterminer l'inverse le cas échéant.

1. $a = 3$ et $n = 7$
2. $a = 3$ et $n = 10$
3. $a = 4$ et $n = 12$
4. $a = 6$ et $n = 9$
5. $a = 9$ et $n = 16$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $3x \equiv 1\,[11]$
2. $3x \equiv 4\,[12]$
3. $5x \equiv 7\,[14]$
4. $5x \equiv 6\,[8]$

Exercice 9. Soit $N = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ avec $a_n \neq 0$ et pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $a_k \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant a_k \leqslant 9$ (les a_k correspondent aux chiffres apparaissant dans l'écriture décimale de N).

1. Montrer que N est divisible par 3 si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ est divisible par 3.
2. Énoncer et démontrer une règle de divisibilité par 11.

Exercice 10. En astronomie, on observe deux étoiles A et B une même nuit. L'étoile A apparaît périodiquement tous les 35 jours tandis que l'étoile B apparaît périodiquement tous les 77 jours. Combien de jours faudra-t-il attendre pour pouvoir observer les étoiles A et B simultanément ?

Exercice 11. Dans chaque cas, déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le PGCD de n et m puis déterminer une identité de Bézout entre n et m.

1. $n = 17$ et $m = 5$
2. $n = 25$ et $m = 72$
3. $n = 150$ et $m = 357$
4. $n = 3020$ et $m = 2880$
5. $n = 1027$ et $m = 1032$

Exercice 12.
1. Montrer que la fraction $\dfrac{1510}{503}$ est irréductible.
2. Réduire la fraction $\dfrac{4389}{5544}$ en fraction irréductible.

Exercice 13. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Déterminer $\mathrm{PGCD}(7n+9\,;n+1)$.

Exercice 14. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fraction $\dfrac{n}{n^2+1}$ est irréductible.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\sqrt{n}$ est un entier naturel ou un irrationnel.

Exercice 16. Montrer que pour tout entier premier $p \geqslant 5$, $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Exercice 17. Dans chaque cas, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

1. Suite de Fibonacci : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$;
2. Nombres de Mersenne : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 2^n - 1$;
3. Nombres de Fermat : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 2^{2^n} + 1$.

Indication : pour la question 3, on pourra commencer par calculer $u_{n+1} - (u_n - 2) \times u_n$.

Exercice 18. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, la fraction $\dfrac{n(2n+1)}{n+1}$ est irréductible.

Exercice 19. Soient a et b des entiers naturels non nuls.
Montrer que si $\dfrac{a}{b}$ est une fraction irréductible, alors $\dfrac{ab}{a+b}$ est irréductible.

Exercice 20. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1. $38x = 65y$
2. $22x = 40y$
3. $208x = 390y$

Exercice 21. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1. $11x - 15y = 3$
2. $24x + 33y = 7$
3. $84x + 55y = 4$

3 Nombres premiers

Exercice 22.

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6n+5$.

Exercice 23. Montrer que pour tout $n \geqslant 10^9$, la décomposition de n en produit de facteurs premiers fait apparaître moins de dix facteurs premiers distincts.

Exercice 24. Montrer que pour tout entiers x et y, et pour tout entier premier p,

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \left[p\right].$$

Exercice 25. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe n entiers consécutifs qui ne sont pas premiers.

Exercice 26. On considère un entier $n \geqslant 2$ et on définit le n^{e} nombre de Mersenne par $M_n = 2^n - 1$.

1. Montrer que si M_n est premier, alors n est premier.
2. En considérant le cas $n = 11$, montrer que la réciproque de la proposition précédente est fausse.

Exercice 27. On considère un entier $n \geqslant 1$ et on définit le n^{e} nombre de Fermat par $M_n = 2^{2^n} + 1$.

1. En utilisant la calculatrice, montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.
2. Soit $n \geqslant 5$ et soit p un diviseur premier de F_n.
   Montrer que $p \equiv 1\left[2^{n+1}\right]$.
3. Déterminer un diviseur premier de F_5 inférieur à 1000.

Exercice 28. On définit la fonction indicatrice d'Euler de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \longmapsto & \phi(n) \end{array}\right.$$

où $\phi(n)$ désigne le nombre d'entiers premiers avec n entre 1 et n.

1. Si p est premier, exprimer $\phi(p)$ en fonction de p.
2. Si p est premier et $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
   $$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$
3. L'objectif de cette question est de montrer que ϕ est une fonction multiplicative, c'est-à-dire que si a et b sont premiers entre eux, on a :
   $$\phi(a \times b) = \phi(a) \times \phi(b).$$
   Dans toute la suite, a et b désignent donc deux entiers strictement positifs et premiers entre eux.
   (a) Pour tout entier $x \geqslant 1$, on note $E_x = \{0, 1, \ldots, x-1\}$ sur lequel on définit l'addition et la multiplication modulo x. De plus, on note E_x^* l'ensemble des éléments de E_x qui sont inversibles modulo x.
   Montrer que pour tout $x \geqslant 1$,
   $$\phi(x) = \operatorname{Card}(E_x^*).$$
   (b) On définit l'application suivante :
   $$\mathrm{F} : \left\{\begin{array}{ccc} E_{ab} & \longrightarrow & E_a \times E_b \\ k & \longrightarrow & (k \bmod a\,; k \bmod b) \end{array}\right.$$
   Montrer que tout $(x\,; y) \in E_a \times E_b$ admet un unique antécédent par la fonction F.
   (c) Montrer que pour tout $k \in E_{ab}$,
   $k \in E_{ab}^*$ si, et seulement si,
   $\mathrm{F}(k) \in E_a^* \times E_b^*$.
   (d) En déduire que :
   $$\operatorname{Card}(E_{ab}^*) = \operatorname{Card}(E_a^*) \times \operatorname{Card}(E_b^*)$$
   puis que la fonction ϕ est multiplicative.
4. Calculer le nombre d'entiers premiers avec 3 096 entre 1 et 3096.