Chapitre 6

Équations différentielles

I. Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Il s'agit de chercher l'ensemble des fonctions y définies et dérivables sur un intervalle I telles que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $y'(x) + ay(x) = b(x)$ (où $a \in \mathbb{R}$ et b est une fonction continue sur I).

1. Résolution de $y'(x) + ay(x) = 0$

Proposition 6.1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit y une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $y'(x) + ay(x) = 0 \iff$ il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \mathrm{C}e^{-ax}$.

Démonstration. Il est clair que les fonctions de la forme $f(x) = \mathrm{C}e^{-ax}$ sont solutions de l'équation différentielle.
Réciproquement, supposons que f est une solution de $y' + ay = 0$.
On sait que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) + af(x) = 0$
Donc $\forall x \in \mathrm{I}, \quad e^{ax} f'(x) + ae^{ax} f(x) = 0$
Donc $\forall x \in \mathrm{I}, \quad \left(e^{ax} f(x)\right)' = 0$
On en déduit que la fonction $x \longmapsto e^{ax} f(x)$ est constante sur I (car I est un intervalle) et donc qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = \mathrm{C}e^{ax}$. □

2. Résolution de $y'(x) + ay(x) = b(x)$

Proposition 6.2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et b une fonction continue. On considère l'équation (E) : $y'(x) + ay(x) = b(x)$. On suppose qu'il existe une solution f_0 de l'équation (E). Alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\left\{x \longmapsto f_0(x) + \mathrm{C}e^{-ax} \,|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}$$

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit f_0 une solution de (E) (cela signifie que $f_0' + af_0 = b$). Ainsi,

$$\begin{aligned}
f \text{ est une solution de (E)} &\iff f' + af = b \\
&\iff f' + af = f_0' + af_0 \\
&\iff f' - f_0' + af - af_0 = 0 \\
&\iff (f - f_0)' + a(f - f_0) = 0 \\
&\iff (f - f_0) \text{ est solution de } y' + ay = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathrm{I},\ (f - f_0)(x) = \mathrm{C}e^{-ax} \text{ (avec } \mathrm{C} \in \mathbb{R}) \\
&\iff \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) - f_0(x) = \mathrm{C}e^{-ax} \text{ (avec } \mathrm{C} \in \mathbb{R}) \\
&\iff \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f_0(x) + \mathrm{C}e^{-ax} \text{ (avec } \mathrm{C} \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

□

Remarque. *D'après le programme du lycée, les solutions d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = \mathrm{C}e^{-ax} + \frac{b}{a}$. Il s'agit simplement d'un cas particulier de la proposition 6.2. En effet, la solution particulière de l'équation différentielle est, dans ce cas, la fonction constante $f_0(x) = \frac{b}{a}$.*

Méthode – Résolution d'une équation d'ordre 1 à coefficients constants

- On résout $y' + ay = 0$ (appelée équation homogène $\mathrm{E_H}$)
- On cherche une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante : une solution sous la forme $\mathrm{C}(x)e^{-ax}$.
- On en déduit l'ensemble des solutions (somme).

Exemple 1. *Résoudre (E) $y' + 3y = x$ sur $\mathbb{R}$.*

Solution :

- *On résout $y' + 3y = 0$ (EH).*
  Les solutions de (EH) sont les fonctions

$$y(x) = \mathrm{C}e^{-3x} \qquad (\mathrm{C} \in \mathbb{R}).$$

- *On cherche une solution particulière de la forme $y(x) = \mathrm{C}(x)e^{-3x}$.*
  On a $y'(x) = \left(\mathrm{C}'(x) - 3\mathrm{C}(x)\right)e^{-3x}$
  Ainsi,

$$\begin{aligned}
y'(x) + 3y(x) = x &\iff \left(\mathrm{C}'(x) - 3\mathrm{C}(x)\right)e^{-3x} + 3\mathrm{C}(x)e^{-3x} = x \\
&\iff \mathrm{C}'(x) = xe^{3x}
\end{aligned}$$

Une intégration par partie permet d'obtenir $\mathrm{C}(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3x}$.
Au final, une solution particulière est donnée par

$$y(x) = \mathrm{C}(x)e^{-3x} = \frac{x}{3} - \frac{1}{9}$$

- *L'ensemble des solutions de (E) est donc :*

$$\mathscr{S}_{\mathrm{E}} = \left\{x \longmapsto \mathrm{C}e^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{1}{9}, \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}$$

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients fonctions continues

On souhaite résoudre

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

On commence par traiter le cas où b est la fonction nulle.

1. Résolution de $y'(x) + a(x)y(x) = 0$

On peut chercher une solution sous la forme $e^{f(x)}$. On est alors amené à prendre $f(x) = -\mathrm{A}(x)$ où A est une primitive de a.

Proposition 6.3

Soit A une primitive de la fonction a. Alors l'ensemble des solutions de $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ est donnée par :

$$\left\{x \longmapsto \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(x)} \mid \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Démonstration. Il est facile de vérifier que les fonctions de la forme $f(x) = \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(x)}$ sont solutions de l'équation différentielle.
Réciproquement, supposons que f est une solution de $y' + ay = 0$.
On sait que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) + a(x)f(x) = 0$
Donc $\forall x \in \mathrm{I}$, $\quad e^{\mathrm{A}(x)}f'(x) + a(x)e^{\mathrm{A}(x)}f(x) = 0$
Donc $\forall x \in \mathrm{I}$, $\quad \left(e^{\mathrm{A}(x)}f(x)\right)' = 0$
On en déduit que la fonction $x \longmapsto e^{\mathrm{A}(x)}f(x)$ est constante sur I (car I est un intervalle) et donc qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(x)}$. □

Exemple 2. *Résoudre* $y'(x) + xy(x) = 0$.

Solution :
Les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = \mathrm{C}e^{-\frac{x^2}{2}}$ *(où* $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$*).*

2. Résolution de $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$

Proposition 6.4

Soient $a$et b des fonctions continues. On considère l'équation (E) : $y'(x) + ay(x) = b(x)$. On suppose qu'il existe une solution f_0 de l'équation (E). Alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\left\{f(x) = f_0(x) + \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(x)} \,|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Démonstration. La preuve est laissée au lecteur. Elle est en tout point similaire à celle de la proposition 6.2. □

Méthode – Résolution d'une équation d'ordre 1 à coefficients non constants

- On résout $y' + a(x)y = 0$ (appelée équation homogène $\mathrm{E_H}$)
- On cherche une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante : une solution sous la forme $\mathrm{C}(x)e^{-\mathrm{A}(x)}$.
- On en déduit l'ensemble des solutions (somme)

Exemple 3. *Résoudre (E) :* $y'(x) + xy(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ *sur* $]0;+\infty[$.

Solution :

- *Les solutions de l'équation homogène sont de la forme* $y(x) = \mathrm{C}e^{-\frac{x^2}{2}}$ *(avec* $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$*).*
- *On cherche une solution particulière de (E) de la forme* $y(x) = \mathrm{C}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ *On a* $y'(x) = \left(\mathrm{C}'(x) - x\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$ *Ainsi, on obtient que* C *vérifie* $\mathrm{C}'(x) = 1$ *et* $\mathrm{C}(x) = x$ *convient.*
  Au final, une solution particulière de (E) est la fonction

$$y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

- *L'ensemble des solutions de (E) est donc :*

$$\mathscr{S}_{\mathrm{E}} = \left\{x \longmapsto \mathrm{C}e^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}$$

III. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Proposition 6.5

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. On considère l'équation différentielle (sur $\mathbb{R}$) suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \quad \text{(E)}$$

- Si $\Delta > 0$, l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions de la forme :
$$y : t \longmapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$
où r_1 et r_2 sont les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.
- Si $\Delta = 0$, l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions de la forme :
$$y : t \longmapsto C_1 e^{r_0 t} + C_2 t e^{r_0 t}$$
où r_0 est l'unique solution de $ax^2 + bx + c = 0$.
- Si $\Delta < 0$, l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions de la forme :
$$y : t \longmapsto C_1 \cos(\alpha t) e^{\beta t} + C_2 \sin(\alpha t) e^{\beta t}$$
où $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ sont les deux solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.

Démonstration.

- Supposons $\Delta > 0$. Il est immédiat de vérifier que les fonctions $t \longmapsto e^{r_1 t}$ et $t \longmapsto e^{r_2 t}$ sont bien des solutions de l'équation (E). Par linéarité du problème, toutes les fonctions de la forme $t \longmapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ sont donc également solutions.
On va montrer que ce sont les seules.
On considère donc une fonction dérivable $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de (E). En s'inspirant des équations d'ordre 1, on pose $z(t) = e^{-r_1 t} y(t)$. On obtient alors
$$az'' + (2ar_1 + b)z' + (ar_1^2 + br_1 + c)z = 0.$$
En utilisant le fait que r_1 est une racine de $ax^2 + bx + c$, on a donc :
$$az'' + (2ar_1 + b)z' = 0.$$
Ainsi, z' est solution d'une équation d'ordre 1 à coefficients constants. On a donc $z'(t) = Ce^{\left(-2r_1 - \frac{b}{a}\right)t} = Ce^{(r_2 - r_1)t}$.
Finalement, cela implique $z(t) = C_1 e^{(r_2 - r_1)t} + C_2$ et donc que
$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$
- Supposons $\Delta = 0$. Là aussi, il est immédiat de vérifier que toutes les fonctions de la forme $t \longmapsto C_1 e^{r_0 t} + C_2 t e^{r_0 t}$ sont bien solutions.
On considère ensuite une fonction dérivable $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de (E). en posant $z(t) = e^{-r_0 t} y(t)$, on montre que $z''(t) = 0$ et donc que z est affine, d'où le résultat.

- Supposons que $\Delta < 0$. On vérifie que toutes les fonctions données sont bien solutions de l'équation différentielle. Pour montrer que ce sont les seules, on va s'intéresser à la résolution complexe de l'équation différentielle $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0$. L'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant cette équations sont les fonctions de la forme
$$y(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}),$$
la preuve étant identique au cas $\Delta > 0$.
Il suffit alors d'écrire :
$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\alpha t}\left(\frac{C_1+C_2}{2}(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}) + \frac{C_1-C_2}{2}(e^{i\beta t}-e^{-i\beta t})\right) \\ &= e^{\alpha t}\left((C_1+C_2)\cos(\beta t) + i(C_1-C_2)\sin(\beta t)\right) \end{aligned}$$
Comme on cherche une fonction à valeurs réelles, on a nécessairement $y(0) \in \mathbb{R}$ et $y\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{R}$, ce qui impose $C_1 + C_2 \in \mathbb{R}$ et $i(C_1 - C_2) \in \mathbb{R}$, ce qui donne bien le résultat annoncé.

□

Exercices

Exercice 1. *Variation de la constante*

1. *Donner toutes les solutions l'équation* $y'(x) + y(x) = 0$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
2. *Donner les solutions qui vérifient respectivement* $y(0) = 0$, $y(0) = -1$ *et* $y(0) = 1$. *Tracer ces fonctions.*
3. *Donner toutes les solutions de* $y'(x) + y(x) = 2\sin x$ *sur* $I = \mathbb{R}$ *par la technique de la variation de la constante. Déterminer les solutions qui vérifient* $y(0) = 0$, $y(0) = 1$ *et* $y(0) = -1$.
4. *Refaire le même exercice avec l'équation*
$$y'(x) - y(x) = (x+1)e^x \textit{ sur } I = \mathbb{R}$$

Exercice 2. *Séparation de variables Résoudre les équations différentielles sur les intervalles* I *indiqués :*
$$xy' - 2y = x^3, I = \mathbb{R}_+^* \textit{ et } y' + y\tan x = \sin 2x, I =]-\pi/2, \pi/2[$$
$$y'(x^2+1) + 2xy = 3x^2 + 1, I = \mathbb{R}$$

Exercice 3. *Soit la fonction* f *définie, pour tout* x *réel, par :* $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$. *Calculer* $f' + f$. *En déduire une primitive de* f.

Exercice 4. *Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle considéré :*
$$f' + f = \cos x \textit{ pour } x \in \mathbb{R},$$
$$f'(1-x^2) + 2xy = 1 \textit{ pour } x \in]1, +\infty[,$$
$$f' - 2f = e^x \textit{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. *On cherche à résoudre, pour $x \geq 1$,*

$$x^2 f'(x) = f^2(x) - 2x f(x) + 2x^2, \quad f(1) = 0.$$

1-On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g satisfait l'équation

$$x g'(x) = g^2 - 3g + 2, \quad g(1) = 0$$

2-Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{z^2-3z+2}$ et trouver la fonction $g(x)$.
3-Résoudre l'équation de départ.