Université Gustave Eiffel — **Licence L1**
2ème semestre 2022/2023 — **Algèbre linéaire**

TD 5 : Systèmes linéaires

Exercice 1. Démontrer que les systèmes $(\mathcal{S}_1)$, $(\mathcal{S}_2)$ et $(\mathcal{S}_3)$ sont équivalents au système $(\mathcal{S})$, où

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=-1 \\ 9x+3y+7z=14 \end{cases}$$

et

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 9x+3y+7z=14 \\ x+y+z=1 \end{cases} \quad , \quad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} -x-y-z=-1 \\ 2x+4y-2z=-2 \\ 9x+3y+7z=14 \end{cases} \quad , \quad (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 8x+y+8z=15 \\ -133x-133y-133z=-133 \end{cases} .$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x-2y & = & 5 \\ -6x+3y & = & 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y-3z & = & 5 \\ 3x-2y+2z & = & 5 \\ 5x-3y-z & = & 16 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x+y-z & = & -1 \\ x-2y-z & = & 1 \\ 2x-7y-8z & = & 2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -x+y-z & = & 1 \\ x-2y-z & = & 1 \\ 2x-7y-8z & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y-3z & = & -1 \\ 2x+y-2z & = & 1 \\ x+y+z & = & 3 \\ x+2y-3z & = & 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1 \\ x+2y+3z+4t & = & 2 \\ x+3y+6z+10t & = & 4 \\ x+4y+10z+20t & = & 6 \end{array} \right.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & a \\ x+jy+j^2z & = & b \\ x+j^2y+jz & = & c \end{array} \right.$$

où $j=e^{2i\pi/3}$, et $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Quelle valeur donner à a pour que le système suivant n'admette pas de solution?

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ -3x+y-2z=-7 \\ 5x+ay-4z=2 \end{cases}$$

Exercice 5. Déterminer a, b, c pour que les systèmes suivants admettent une et une seule solution:

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 2x+3y=a \\ x-2y=b \\ 3x+2y=c \end{cases} \quad , \quad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} x+5y=a \\ -x+y=b \\ 3x-2y=c \end{cases} .$$

Exercice 6. Résoudre le système à paramètre réel m

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + my + (m-1)z = m+1 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m-1 \end{cases}.$$

Exercice 7. On cherche à résoudre le système à paramètres réels a, b, avec $a \neq b$,

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3t = 0 \\ x + by + b^2z + b^3t = 0 \\ y + 2az + 3a^2t = 1 \\ y + 2bz + 3b^2t = 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que (x, y, z, t) est solution du système $(\mathcal{S})$ si et seulement si le polynôme $P(X) = x + yX + zX^2 + tX^3$ vérifie $P(a) = P(b) = 0$ et $P'(a) = P'(b) = 1$.
2. En déduire P(X).
3. Résoudre $(\mathcal{S})$.

Exercice 8. Discuter, selon m paramètre réel, la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

a) $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + my + z = 0 \\ mx + y + mz = 0 \end{cases} \right\}$ b) $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases} \right\}$.