

TD1 – Lecture de tables statistiques et construction de lois

Exercice 1.

1. Quelle est la valeur de $U_{.116}$?

Corrigé : $U_{.116} = -1,1952$

2. Quelle est la valeur de $\mathcal{T}_{.30}(16)$ pour un intervalle unilatéral à gauche ?

Corrigé : $\mathcal{T}_{.30}(16) = -0,535$

3. Quelle est la valeur de $\chi^2_{.975}(15)$ pour un intervalle unilatéral à gauche ?

Corrigé : $\chi^2_{.975}(15) = 27,49$

4. Quelle est la valeur de $F_{.05}(9; 12)$?

Corrigé :

$$F_{.05}(9; 12) = \frac{1}{F_{.95}(12; 9)} = \frac{1}{2,8} = 0,357$$

5. Soient N_1, N_2, N_3 et N_4 des variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Donner la loi suivie par la variable

$$M = \frac{N_2}{\sqrt{\frac{N_3^2 + N_4^2}{2}}}.$$

Corrigé : $M \sim \mathcal{T}(2)$

- Exercice 2.** 1. Quelle est la valeur de $\chi^2_{.80}(20)$ pour un intervalle unilatéral à droite ?

Corrigé : $\chi^2_{.80}(20) = 14,58$

2. Quel est l'intervalle bilatéral symétrique $\chi^2_{.80}(50)$?

Corrigé : On calcule $\frac{(U_{.90} + \sqrt{99})^2}{2}$ et $\frac{(U_{.10} + \sqrt{99})^2}{2}$.

On trouve l'intervalle

$$[37,57; 63,07]$$

3. Quelle est l'intervalle bilatéral symétrique $U_{.252}$?

Corrigé : $[-1,1455; 1,1455]$

4. Quelle est la valeur de $\mathcal{T}_{.40}(28)$ sur un intervalle unilatéral à gauche ?

Corrigé : $\mathcal{T}_{.40}(28) = -0,2558$

5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $X \sim \mathcal{N}(6; 5)$. Calculer $P(X \geq 3)$.

Corrigé : $P(X \geq 3) = P\left(\frac{X-6}{\sqrt{5}} \geq -0,6\right) = 0,72575$

Exercice 3. Soit $n \geq 13$. Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$. Déterminer les lois des variables aléatoires suivantes lorsqu'il s'agit de lois connues :

1. $\sum_{i=2}^{n-4} X_i$

Corrigé : $\mathcal{N}(0; \sqrt{n-5})$

2. $\frac{\sum_{i=2}^{n-3} X_i}{n-2}$

Corrigé : $\mathcal{N}\left(0; \frac{\sqrt{n-4}}{n-2}\right)$

3. $\sum_{i=3}^{n-4} X_i^2$

Corrigé : $\chi^2(n-6)$

4. $\frac{X_1}{\sqrt{\frac{\sum_{i=7}^{n-6} X_i^2}{n-12}}}$

Corrigé : $\mathcal{T}(n-12)$

$$5. \quad \frac{\frac{\sum_{i=2}^{n-3} X_i^2}{n-4}}{\frac{\sum_{i=3}^{n-5} X_i^2}{n-7}}$$

Corrigé : Il ne s'agit pas d'une loi connue car les variables aléatoires $\sum_{i=2}^{n-3} X_i^2$ et $\sum_{i=3}^{n-5} X_i^2$ ne sont pas indépendantes.

$$6. \quad \frac{X_1}{\sqrt{\frac{\sum_{i=4}^{n-1} X_i^2}{4}}}$$

Corrigé : Il ne s'agit pas d'une loi connue car le coefficient 4 ne correspond pas au degré de liberté de $\sum_{i=4}^{n-1} X_i^2$.

$$7. \quad \frac{\sum_{i=2}^{n-11} X_i^2}{\sum_{i=n-10}^n X_i^2} \times \frac{11}{n-12}$$

Corrigé : $F(n-12; 11)$

Exercice 4. 1. Soit $n \geq 8$. Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi Normale centrée réduite. Déterminer $\lambda_n \in \mathbb{R}$ pour que la variable aléatoire

$$W_n = \frac{X_5}{\sqrt{\frac{\sum_{i=6}^{n-2} X_i^2}{\lambda_n}}}$$

suive une loi de Student et préciser son degré de liberté.

Corrigé : $\lambda_n = n-7$ et $W \sim \mathcal{T}(n-7)$.

2. Soit $n_1 \in \mathbb{N}^*$ et $n_2 \in \mathbb{N}^*$. Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq 19}$ des variables aléatoires indépendantes telles que :

- $X_1 \sim \chi^2(n_1)$
- $X_2 \sim \chi^2(n_2)$
- $\forall 3 \leq i \leq 19, X_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

Déterminer la loi suivie par

$$Y = \frac{X_1}{n_1} \times \frac{n_2 + 17}{X_2 + \sum_{i=3}^{19} X_i^2}.$$

Corrigé : $F(n_1; n_2 + 17)$