

Mathématiques pour économistes

1

Licence 1

2026/2027 : Semestre 1

Yannick VINCENT

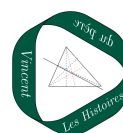
**Faculté d'économie de
Montpellier**

www.yannickvincent.fr

Table des matières

Vocabulaire mathématique	7
1 Logique et raisonnement	11
I Premiers éléments de logique	11
I.1 « Négation », « et », « ou »	11
I.2 L'implication logique	12
II Propositions et quantificateurs	14
II.1 Quantificateurs	14
II.2 Négation	14
II.3 Commutativité des quantificateurs iden- tiques	14
II.4 Non-commutativité des quantificateurs dif- férents	14
III Techniques de raisonnements	15
III.1 Raisonnement par équivalences successives	15
III.2 Raisonnement par disjonction de cas . . .	15
III.3 Raisonnement par contraposée	15
III.4 Raisonnement par l'absurde	16
III.5 Raisonnement par récurrence	16
III.6 Raisonnement par analyse-synthèse . . .	16
IV Ensembles	16
IV.1 Quelques exemples d'ensembles	16
IV.2 Généralités sur les ensembles	17
IV.3 Produit cartésien d'ensembles	19
2 Suites numériques	20
I Généralités	20
II Suites arithmétiques	24
III Suites géométriques	24
IV Suites arithmético-géométriques	25
V Suites récurrentes d'ordre deux	26
3 Fonctions bijectives et réciproques	27
4 Continuité	29
I Définitions et généralités	29
II Théorème des valeurs intermédiaires	30

II.1	TVI, version 1	30
II.2	TVI, version 2	30
III	Théorème des bornes atteintes	31
III.1	Théorème des bornes atteintes, version 1 .	31
III.2	Théorème des bornes atteintes, version 2 .	31
5	Dérivabilité	33
I	Dérivée, différentielle et élasticité	33
II	Dérivation des fonctions réciproques	37
III	Accroissements finis	37
III.1	Théorème de Rolle	37
III.2	Théorème des accroissements finis	37
III.3	Inégalité des accroissements finis	38
IV	Dérivées d'ordre supérieur	38
V	Formules de Taylor	38
V.1	Développements à l'ordre 1	39
V.2	Développements de Taylor à l'ordre n . . .	39
6	Optimisation et convexité	41
I	Optimisation	41
II	Convexité	42
II.1	Définitions et caractérisation des fonctions convexes	42
II.2	Concavité des fonctions d'utilité	44
II.3	Convexité et optimisation	44
III	Quasi-convexité	44
7	Calcul intégral	46
I	Primitives	46
II	Intégrales : Définition et premières propriétés . .	47
III	Intégration par parties	49
IV	Changement de variables	50
V	Primitives de fractions rationnelles	51



Introduction

Quelques conseils pour progresser

Si chacun a ses propres habitudes en ce qui concerne les apprentissages, il existe néanmoins des méthodes plus efficaces que d'autres. Les éléments ci-dessous constituent une liste non-exhaustive de conseils qui peuvent être utiles et que chacun pourra s'approprier à sa façon.

En Cours et en TDs

- **Être attentif** est une condition indispensable pour comprendre. Cela signifie notamment le fait de toujours écouter les explications données par le professeur. Cela inclut y compris le fait de ne pas demander des explications à son voisin sur une notion que le professeur est justement en train d'expliquer. Il y a des temps prévus pour le travail en groupe (parfois en TD par exemple) et d'autres où il est nécessaire d'écouter. Ne pas respecter ces différents moments apportera de la confusion et ne vous permettra pas de progresser.
- **L'écoute en cours doit être active.** Lorsque l'on écoute un cours, il faut toujours se poser les questions suivantes :
 1. Est-ce que j'ai compris exactement ce que dit le professeur?
 2. Est-ce que je sais identifier précisément quelle proposition ou quelle définition on utilise dans le raisonnement?
 3. Est-ce que je comprend globalement pourquoi on est en train de faire ce que l'on fait? (à quoi cela sert)

Cette dernière question étant d'ordre plus général, il est parfois nécessaire de la mettre provisoirement de côté afin de se concentrer dans un premier temps sur les aspects plus techniques. Cependant, il est toujours important d'y revenir par la suite car c'est cela qui vous

permettra de vous approprier pleinement les notions et de leur donner un sens.

- **Poser des questions.** Le fait de poser des questions lorsque l'on ne comprend pas (en demandant simplement au professeur de réexpliquer) est ce qui permettra au professeur de se mettre à votre niveau et d'adapter au mieux son cours. Cela rendra les choses plus faciles pour tout le monde et vous permettra de mieux comprendre la suite. S'il n'est pas toujours possible de poser une question en amphithéâtre, les Travaux Dirigés sont en revanche un lieu privilégié pour le faire.
- **Noter les passages pas clairs** (en faisant une petite croix dans la marge par exemple) est une astuce à retenir pour pouvoir revenir dessus après le cours. Dans le cas où vous êtes un peu perdu, il est inutile de paniquer mais il faut faire l'effort de s'accrocher. Il y a en fait pleins d'occasions de reprendre le fil : lorsque l'on termine une démonstration compliquée et que l'on passe à un autre théorème par exemple.
- **Lors des Travaux Dirigés**, il est nécessaire de ne pas attendre la correction mais de chercher activement les exercices. C'est notamment un moment privilégié pour revenir sur une méthode classique vue en cours afin de l'assimiler. Lorsque l'on ne sait pas faire un exercice, une erreur classique est de se tourner tout de suite vers un camarade pour demander des explications. Si la collaboration est quelque chose d'important, il est néanmoins tout aussi important de commencer à chercher un exercice seul. Ce n'est qu'après avoir bien cerné et identifié vos propres difficultés face à cet exercice que vous pourrez poser une questions plus précise à un camarade. Là aussi, il s'agit finalement de toujours être actif face aux apprentissages.
- Le point précédent ne doit pas masquer toute **l'importance de s'entraider entre camarades**. L'entraide est d'ailleurs tout aussi importante pour celui qui se fait aider que pour celui qui aide. Expliquer quelque chose permet en effet de s'assurer que l'on a bien compris soi-même. La collaboration entre étudiants est donc tout à fait importante. Il y a simplement un moment pour le faire.

À la maison

- **Travailler régulièrement** en revoyant systématiquement son cours avant le cours suivant et en faisant des exercices est indispensable. Travailler avec des camarades en allant par exemple à la Bibliothèque peut d'ailleurs



être un bon moyen de se motiver.

- **Revoir le cours** ne signifie pas simplement le lire. Cela se fait nécessairement un crayon à la main pour refaire les exemples. Il faut par ailleurs connaître les définitions et les propositions de manière précise, sans oublier aucune hypothèse, et savoir les réciter. Cela ne doit pas être approximatif car c'est en connaissant bien le contenu de votre cours que vous pourrez résoudre des exercices sans vous tromper.
- **Faire et refaire des exercices.** Étant donné que les évaluations consistent majoritairement à résoudre des exercices, il est clair qu'il est important de s'entraîner à cela. Là aussi, il ne faut pas se contenter de relire les exercices vus en classe mais s'assurer que l'on est capable de les refaire, crayon en main. Tant que l'on est pas capable de refaire l'exercice sans aide du corrigé, il faut considérer que les notions ne sont pas complètement acquises et qu'il faudra donc refaire les exercices en questions le lendemain ou quelques jours plus tard. À noter que des exercices supplémentaires ainsi que des capsules vidéos sur le contenu du cours sont disponibles en ligne sur la page du cours.
- Il est important de savoir **trouver un équilibre entre l'apprentissage du cours et la résolution d'exercices.** Parfois, certains étudiants pensent que le fait de connaître précisément le cours est inutile car ce n'est pas ce qui sera directement évalué. C'est une erreur car c'est justement la connaissance du cours qui vous permettra de savoir si vous avez le droit d'utiliser un théorème ou non, et vous évitera de tomber dans les pièges classiques. A contrario, apprendre son cours sans faire d'exercices n'est pas une stratégie efficace. Il faut donc apprendre à gérer son planning de révisions afin de travailler à la fois le cours et les exercices.
- **Faire des fiches synthèses** peut également être une bonne idée tant pour mémoriser le cours que les méthodes vues en TD.

Lettres grecques

En mathématiques, il est d'usage de nommer de manière semblable des objets de même nature. Par exemple, si un exercice utilise trois nombres réels, on les notera souvent x , y et z . Si l'on introduit des fonctions, on les notera f , g et h . Pour des points géométriques, on utilisera plutôt les lettres A , B et

C, etc. Cela facilite la compréhension mais nécessite bien souvent d'utiliser beaucoup de symboles. C'est pourquoi les mathématiques utilisent très régulièrement les lettres grecques et qu'il faut les **connaître absolument**.

Nom	Minuscule	Majuscule
Alpha	α	A
Bêta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ	E
Zêta	ζ	Z
Êta	η	H
Thêta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	M
Nu	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omicron	o	O
Pi	π	Π
Rhô	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Upsilon	υ	Υ
Phi	ϕ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Oméga	ω	Ω

Vocabulaire mathématique

Les points « Étymologie » sont extraits de *Les mots et les maths, dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique*, Bertrand Hauchecorne, 2014, ellipses.

Mathématiques

Étymologie : Le mot *mathématique* nous vient du grec *mathema* ou plutôt de son pluriel *mathemata*. ce mot désignait aussi bien le fait d'apprendre que son résultat : la connaissance, la science. Sous l'influence de Platon et d'Aristote pour qui les mathématiques sont un avoir fondamental, le mot se spécialise dans ce que nous appelons les mathématiques, au sens le plus large.

L'usage du pluriel *mathématiques* est un hériage de l'époque antique et médiévale où le *quadrivium* regroupait les quatre *ars mathematica* : l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie

et la musique.

Plus tard, au XVIII^e siècle, on parle des mathématiques sans doute avec l'idée que cette matière englobe des disciplines devenues différentes comme la géométrie, l'algèbre ou même des branches classerait de nos jours en physique. L'utilisation du pluriel semblait en tout cas tout à fait correspondre avec cette pluralité.

Au XX^e siècle, à la suite de Bourbaki (Jean Dieudonné en particulier), certains mathématicien-ne-s privilégient l'utilisation du singulier *mathématique* afin d'insister sur l'unité qui existe entre les différentes parties des mathématiques.

Définition

Une définition est acceptée sans démonstration puisqu'elle donne simplement la signification d'un terme à l'aide de concepts déjà définis antérieurement. La nouvelle notion doit toutefois être définie sans ambiguïté, ce qui explique que l'on puisse trouver des éléments de preuve sous une définition mathématique. Pour ainsi dire, c'est comme si la définition pouvait se diviser en deux parties : une première partie énonçant une proposition (assurant une existence ou une unicité par exemple) et une seconde partie constituant la définition à proprement parler.

Étymologie : Les mathématiques utilisent de nos jours des concepts définis avec soin afin d'établir des théorèmes précis. Il faut cependant attendre le XVI^e siècle, avec le souci de rigueur insufflé à la Renaissance, pour que ce besoin se fasse sentir. Le mot *définition* est un calque du latin *definitio*. Ce dernier désigne une indication précise. On y sent encore l'idée étymologique de marquer une limite. *Définition* n'est d'abord utilisé que pour donner le sens d'un mot. Il faut attendre le XVI^e siècle pour que son sens s'étende à la définition d'un concept.

Proposition

En logique, il s'agit d'une phrase qui ne peut être que vraie ou fausse (principe du tiers exclu).

En mathématiques, il s'agit d'un énoncé qui est vrai. Dans un cours de mathématiques, une proposition est toujours démontrée. Énoncée sous une forme « Si A alors B », on dit que A constitue les hypothèses et que B est la conclusion de la proposition.

Étymologie : Proposer, c'est *poser en avant*. Déjà dans l'Antiquité, *propositio* s'utilise en logique. Repris au XIII^e siècle en français, *proposition* désigne un énoncé soumis au consentement des autres.

Théorème

En mathématiques, il est d'usage de réserver le terme *théorème* aux propositions considérées comme particulièrement



intéressantes ou importantes. D'un point de vue purement logique, rien ne distingue *théorème* et *proposition*. La différence est plutôt d'ordre subjectif.

Étymologie : Le mot *théorème* est construit sur deux racines grecques. la première *thea* désigne le spectacle, on la reconnaît dans *théâtre* et *théorie*. La seconde signifie *observer* ou *contempler*. On la retrouve elle aussi dans *théorie* mais aussi dans *panorama*. *Theorema* désignait à la fois la fête, la méditation et l'objet d'étude. Au début, la pensée mathématique grecque était basée sur l'observation. La rupture fondamentale de ce peuple est de s'être ensuite soucié de justifier un résultat plutôt que de se contenter de l'établir. Le sens du mot *theorema* évolue parallèlement. À l'époque tardive puis chez les Romains il signifie *proposition démontrable*. Bien sûr, la notion de preuve n'était pas celle que nous connaissons de nos jours. Cependant, on peut dire que le mot avait déjà pris le sens actuel. À la Renaissance le souci de démonstration réapparaît en mathématiques. Le mot *théorème* est repris et francisé en 1539.

Axiome

En mathématiques, le mot axiome désignait une proposition qui est évidente en soi dans la tradition mathématique des *Éléments* d'Euclide. L'axiome est utilisé désormais, en mathématique, pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. De ce fait, un axiome est accepté sans démonstration. L'ensemble des axiomes d'une théorie doit être non contradictoire.

Étymologie : Dans son sens premier *axiōma* désignait pour les Grecs *prix, valeur* puis par extension ce qui paraît juste, convenable. L'adjectif *axiōmatikos* désignait ce qui a un air de dignité ou d'autorité. Le mot est repris en latin puis en français à la Renaissance, époque à laquelle il est utilisé en chirurgie. Il faut attendre le siècle suivant pour voir les mathématiciens puis les philosophes l'employer. Le développement de la logique mathématique donne ensuite une place importante à l'adjectif *axiomatique*.

Postulat

Étymologie : Ce mot est introduit au XVIII^e siècle par des mathématiciens travaillant sur Euclide et son cinquième postulat. Il est forgé sur le verbe latin *postulare, demander, souhaiter*. Il désignait une proposition, non nécessairement évidente, que l'on supposait sans pouvoir la démontrer. Il se différenciait à l'époque d'un axiome, vérité évidente en soi mais qu'on ne pouvait démontrer. De nos jours, cette différence n'a plus de sens. Une théorie est basée sur des axiomes : ils sont le principe de base. Leur évidence est fonction de ce qu'elle est censée représenter et n'est plus du domaine de la théorie elle



même.

Lemme

C'est une proposition technique, parfois difficile, mais qui n'a pas d'autre application que de permettre la démonstration d'un théorème. Il arrive qu'avec le temps, ce qui semblait un résultat intermédiaire apparaisse comme une proposition fondamentale et devienne un théorème. Parfois, pour des raisons historiques, le nom de *lemme* lui reste accolé. C'est par exemple le cas du lemme de Gauss en arithmétique.

Étymologie : Dans l'Antiquité, *lemme* était un terme de logique. Il désignait la majeure du syllogisme, c'est-à-dire la première assertion. Ainsi, dans la dialectique grecque, le lemme, le prolemme et l'épiphore sont les trois parties de l'argument. Par extension, le mot désigne ensuite en mathématiques l'un des arguments de la preuve sans en être le fondement.

Corollaire

C'est une proposition qui découle clairement (donc sans démonstration ou presque) d'un théorème établi.

Étymologie : Du latin *corolla* qui signifie petite couronne. *Corollaire* désigne quelque chose d'aucune valeur, de gratuit. Il apparaît puis se spécialise dans son sens mathématique au XVII^e siècle.

Conjecture

Il s'agit d'une proposition non démontrée et que les mathématicien-ne-s cherchent à démontrer. poser une conjecture est un processus fondamental dans la recherche en mathématiques. Les conjectures les plus célèbres qui ont été démontrées récemment sont, sans doute, le grand théorème de Fermat et la conjecture de Poincaré.

Étymologie : du latin *conjectura*, dérivé de *cum* et *jacio* (littéralement jeté avec).

Chapitre 1

Logique et raisonnement

I Premiers éléments de logique

I.1 « Négation », « et », « ou »

Remarque. En logique classique, une phrase ne peut être que vraie ou fausse (c'est le principe du tiers exclu).

Définition 1.1

La **négation** de la proposition A , notée $\text{non}(A)$, est la proposition qui est fausse quand A est vraie et vraie quand A est fausse.

Remarque. $\text{non}(\text{non}(A)) = A$.

Définition 1.2

- On dit que la proposition « A et B » est vraie lorsque A et B sont toutes les deux vraies. Elle est fausse sinon.
- On dit que la proposition « A ou B » est vraie si au moins l'une des deux assertions est vraie. Elle est fausse si A et B sont toutes les deux fausses.

Proposition 1.3

- La négation de « P et Q » est « $\text{non}(P)$ ou $\text{non}(Q)$ ».
- La négation de « P ou Q » est « $\text{non}(P)$ et $\text{non}(Q)$ ».

Exemple 1.

Exemple 2.

I.2 L'implication logique

Définition 1.4 – Implication

L'implication « $A \implies B$ » est vraie lorsque A est fausse ou lorsque A est vraie et B est vraie.

Remarque.

- Autrement dit, l'implication « $A \implies B$ » est vraie signifie :
 - soit que A est fausse (auquel cas, il n'y a rien à vérifier pour que l'implication soit vraie);
 - soit que A est vraie et on a alors nécessairement B vraie également.
- En pratique, on pensera l'implication « $A \implies B$ » comme étant « Si A est vraie, alors B est vraie ».
- Affirmer que l'implication « $A \implies B$ » est vraie ne signifie pas que A et B soient vraies. Cela signifie simplement que, ou bien A et B sont simultanément vraies, ou bien A est fausse (et on ne sait alors rien dire de B).
- En mathématiques, lorsqu'on énonce une proposition sous la forme $A \implies B$, on dit que A correspond aux hypothèses et B à la conclusion. On dit aussi que A est une condition suffisante à B et que B est une condition nécessaire à A.

Exemple 3.

Exemple 4.

Exemple 5.

Exemple 6.



Proposition 1.5

La **négation** de l'implication « $A \Rightarrow B$ » est « A et non(B) ».

Remarque.

- Cela signifie que pour montrer qu'une implication est fausse, il faut trouver un cas dans lequel A est vraie et (mais) B est fausse. Par exemple « $x > 0 \Rightarrow x > 1$ » est fausse car on peut trouver un nombre réel x tel que $x > 0$ est vraie et tel que $x > 1$ est fausse. Il suffit par exemple de prendre $x = \frac{1}{2}$.
- On notera bien que la négation d'une implication n'est pas une implication.

Exemple 7.**Définition 1.6**

- La **réciroque** de l'implication « $A \Rightarrow B$ » est « $B \Rightarrow A$ ».
- On dit que A et B sont équivalentes, et on note $A \Leftrightarrow B$, si « $A \Rightarrow B$ » et « $B \Rightarrow A$ ».

Remarque.

- Attention, ce n'est pas parce que $A \Rightarrow B$ est vraie que sa réciroque est vraie. Par exemple, la proposition « Si $x \geq 1$, alors $x \geq 0$ » est vraie mais sa réciroque est fausse.
- Lorsque $A \Leftrightarrow B$, on dit que « A est vraie, si et seulement si, B est vraie ».

Exemple 8. On considère la proposition (P) : « s'il pleut, alors le sol est mouillé ».

1. Écrire la réciroque de la proposition P
2. Si P est vraie, sa réciroque est-elle vraie?

Remarque.**Proposition 1.7**

L'implication « $A \Rightarrow B$ » est équivalente à « $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ »

Définition 1.8

L'implication « $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ » est appelée la **contraposée** de « $A \Rightarrow B$ ».

Exemple 9.

II Propositions et quantificateurs

II.1 Quantificateurs

En logique, il existe deux quantificateurs :

- le quantificateur universel $\forall$ (pour tout).
- le quantificateur existentiel $\exists$ (il existe au moins un)

Les quantificateurs n'ont leur place que dans des formules symboliques et pas au milieu des phrases écrites en français.

Remarque. De manière générale, on veillera à ce que toute variable utilisée dans une copie soit bien définie au préalable.

Exemple 10. Montrer la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{Q}^*, \exists y \in \mathbb{Q}$ tel que $xy = 1$.

II.2 Négation

Proposition 1.9

La négation de « $\forall x, P(x)$ est vraie » est « $\exists x$, tel que $P(x)$ est fausse ».

La négation de « $\exists x, P(x)$ est vraie », est « $\forall x, P(x)$ est fausse ».

Exemple 11. Soit A est un ensemble de nombres.

La négation de « $\exists x \in A$ tel que $x > 0$ » est « $\forall x \in A, x \leq 0$ ».

La négation de « $\forall x \in A, x \geq 0$ » est « $\exists x \in A$ tel que $x < 0$ ».

Exemple 12. Soient A et B deux points du plan et soit $\mathcal{D}$ une droite. Écrire la négation de la proposition suivante : Pour tout point $M \in \mathcal{D}$, $AM = BM$.

II.3 Commutativité des quantificateurs identiques

La phrase $\forall x, \forall y, \dots$ a la même signification que $\forall y, \forall x, \dots$

La phrase $\exists x, \exists y, \dots$ a la même signification que $\exists y, \exists x, \dots$

II.4 Non-commutativité des quantificateurs différents

Lorsqu'on écrit plusieurs quantificateurs différents à la suite, le sens de la proposition dépend de l'ordre des quantificateurs.

Exemple 13. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*$ tel que $xy = 1$
- $\exists y \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$



III Techniques de raisonnements

III.1 Raisonnement par équivalences successives

On montre que A est équivalente à B en établissant une suite d'équivalences intermédiaires.

Attention! L'utilisation systématique du symbole $\iff$ est à proscrire. Il pousse souvent à écrire des choses fausses ou inutiles. On l'utilisera en revanche dans le cadre de résolutions d'équations.

Exemple 14. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 3 \end{cases}$$

Fin du cours du 10 septembre 2026

III.2 Raisonnement par disjonction de cas

On peut, par exemple, séparer les cas selon la valeur d'une des variables de l'énoncé à démontrer. Il faut néanmoins veiller à bien traiter tous les cas.

Exemple 15. On commence par rappeler la définition suivante.

Définition 1.10 – Valeur absolue

- La **valeur absolue d'un nombre réel** x , notée $|x|$ est le réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- La **fonction valeur absolue** est la fonction suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{cases}$$

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

III.3 Raisonnement par contraposée

Pour montrer $A \implies B$, on suppose $\text{non}(B)$ et on montre que $\text{non}(A)$ est vraie.

Exemple 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.



III.4 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition A est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on montre alors que cela mène à une contradiction.

Exemple 17. *On rappelle qu'un nombre réel x admet un inverse s'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = 1$.*

Montrer que le nombre 0 n'admet pas d'inverse.

III.5 Raisonnement par récurrence

Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à un entier n_0 (en général 0 ou 1), on procède de la manière suivante :

- Initialisation : on montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : on montre que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geq n_0$, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Une fois cela établi, on en conclut que cette propriété est vraie pour tous les nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0 .

Exemple 18. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq (n+1)!$.*

III.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Un raisonnement par analyse-synthèse permet en général de montrer qu'il existe une solution à un problème. Le raisonnement se déroule en deux étapes :

- **l'analyse** : on suppose qu'une solution existe. Par une suite d'implications on en déduit la ou les valeurs possibles pour les solutions.
- **la synthèse** : pour chacune des valeurs obtenues, on vérifie qu'elles sont bien solutions.

Exemple 19. *On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ et que f est impaire si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.*

Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il existe une unique fonction paire P et une unique fonction impaire I telles que $f = P + I$.

Remarque.

IV Ensembles

IV.1 Quelques exemples d'ensembles

Ensembles définis comme une liste d'éléments



- $\{1; 2; 3\}$
- $\{a; b; c\}$
- $\{a\}$: singleton.

Ensembles d'éléments vérifiant une propriété :

- $\left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 5x + 1 \geq 0\right\} = \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right[$
- $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq 10\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \text{ est pair}\}$
- $\{x \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } x^2 \leq 1\}$

Ensembles d'éléments décrit par un paramètre :

- $\{5x + 1 \text{ tel que } x \in \mathbb{R}\} = [1; +\infty[$
- $\{2k \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}$

IV.2 Généralités sur les ensembles

Définition 1.11

L'ensemble vide est l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\emptyset$.

Définition 1.12

Soient A et B deux ensembles. On dit que B est une **partie** ou un **sous-ensemble** de A si, et seulement si, tous les éléments de B sont des éléments de A. On note $B \subset A$. On dit que B est inclus dans A. Par convention, pour tout ensemble A, $\emptyset \subset A$.

Définition 1.13

Deux ensembles A et B sont **égaux** (on note $A = B$) si, et seulement si, chaque élément de A est aussi dans B et chaque élément de B est aussi dans A. Autrement dit, $A = B$ si, et seulement si, $A \subset B$ et $B \subset A$.

Définition 1.14

La **réunion** $A \cup B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Exemple 20. Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 7\}$,

Proposition 1.15

Soit A, B, C des ensembles. Alors,

- $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativité)
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \subset A \cup B$

Remarque. Il est possible de prouver formellement la Proposition 1.15 à partir de la définition 1.14. Il est cependant important de retrouver très rapidement ce genre de résultats (voir également la Proposition 1.17) en faisant un diagramme.

Remarque. La définition de la réunion se généralise à plus de deux ensembles :

- Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles. On définit,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

- On définit également l'**union quelconque** d'ensembles. Si I est un ensemble (fini ou infini) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I \text{ tel que } x \in A_i\}.$$

Ici, la variable i est muette : on peut par exemple la remplacer par j . Ainsi, $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in I} A_j$.

Définition 1.16

L'**intersection** $A \cap B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Exemple 21. Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 7\}$,

On peut bien entendu écrire une proposition similaire à la proposition 1.15 pour l'intersection (laissé au lecteur).

Remarque. La définition de la réunion se généralise à plus de deux ensembles :

- Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles. On définit,

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

- On définit également l'**intersection quelconque** d'ensembles. Si I est un ensemble (fini ou infini),

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I \text{ tel que } x \in A_i\}.$$

Ici aussi, la variable i est muette : on peut par exemple la remplacer par j . Ainsi, $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in I} A_j$.

Proposition 1.17

Soit A, B, C des ensembles. Alors,

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Remarque. La proposition précédente s'interprète comme une « distributivité » de $\cap$ sur $\cup$ et inversement.

Définition 1.18

Deux ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$



IV.3 Produit cartésien d'ensembles**Définition 1.19**

Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de A et B est l'ensemble, noté $A \times B$ constitué des couples $(x; y)$ où $x \in A$ et $y \in B$. On a ainsi :

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Exemple 22. Si $A = \{a; b\}$ et $B = \{5; 6; 7\}$,

On généralise la définition du produit cartésien à un produit de plus de deux ensembles avec la définition suivante.

Définition 1.20

Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles non vides. On définit le produit cartésien des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ par :

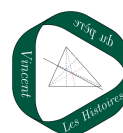
$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid \forall 1 \leq i \leq n, x_i \in A_i\}$$

Si A est un ensemble, on note A^n le produit de A avec lui-même n fois.

Par exemple, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

On appelle n -uplet un élément de A^n .

Fin du cours du 17 septembre 2026



Chapitre 2

Suites numériques

I Généralités

Définition 2.1

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite numérique u est une fonction définie sur $E_{n_0} = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{cases} E_{n_0} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \longmapsto u(n) \end{cases}$$

Remarque.

Plutôt que de noter $u(n)$, on préfère généralement noter u_n (appelé le « terme d'indice n de la suite »). De plus, on note parfois $(u_n)_{n \geq n_0}$ la suite u .

Définition 2.2

- Définir une suite par une formule explicite, c'est exprimer chaque terme de la suite en fonction de n
- Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent.

Méthode – Représenter une suite définie par récurrence

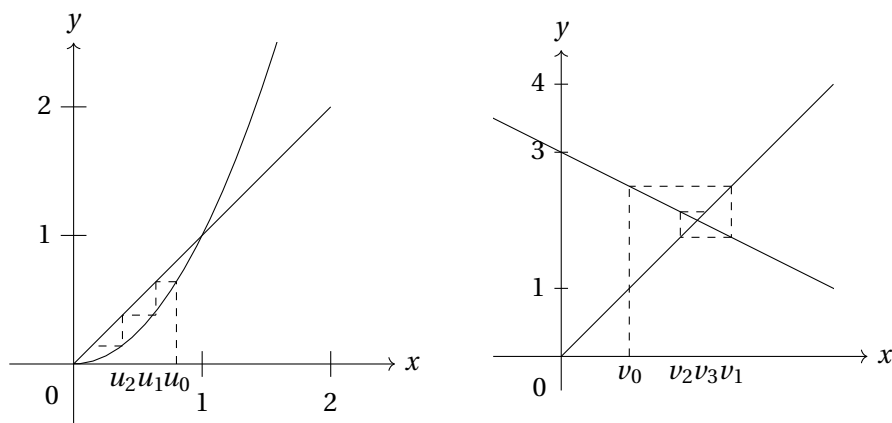
- On trace la courbe représentative de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$
- On trace la droite d'équation $y = x$.
- On construit les termes u_n de proche en proche en utilisant les deux courbes.

Exemple 23.

Représenter graphiquement les suites u et v définies par $\begin{cases} u_0 = 0,8 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 \end{cases}$

$$\text{et } \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n + 3 \end{cases}$$

Remarque. En général, on ne trace pas tous les traits de construction mais on fait seulement apparaître les pointillés entre les deux courbes de la manière ci-dessous. On obtient souvent une figure « en escalier » ou « en spirale ».



Définition 2.3

- Une suite u est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier n , $u_n \leq M$. Le réel M est appelé un majorant de u .
- Une suite u est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier n , $u_n \geq m$. Le réel m est appelé un minorant de u .
- Une suite est **bornée** si elle est minorée et majorée.

Définition 2.4

- Une suite u est **croissante** si pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite u est **décroissante** lorsque, pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Remarque.

- Si l'inégalité vérifiée par la suite est stricte, on dit que la suite est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**).
- Attention! Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes.
Par exemple, c'est le cas de la suite u définie par $u_n = (-1)^n$.

Méthode – Différentes façon de déterminer le sens de variation d'une suite

1. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. Si la suite est définie de manière explicite, on peut étudier le sens de variation de la fonction f telle que $u_n = f(n)$.
3. Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple 24.

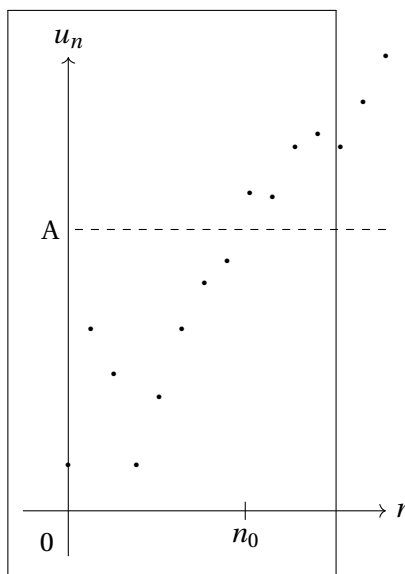
Étudier le sens de variation de la suite u définie pour tout $n > 0$

par $u_n = \frac{1}{n}$.

Définition 2.5

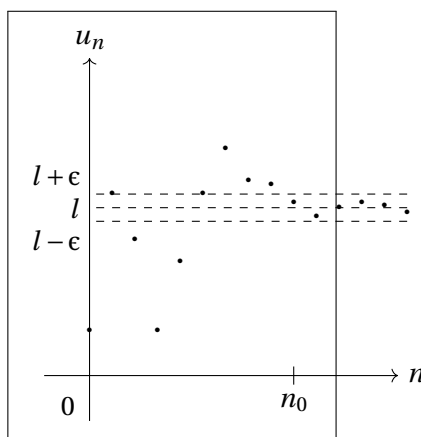
On dit que la suite u a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout réel A , on peut trouver un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à A .

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.


Définition 2.6

On dit que la suite u a pour limite l quand n tend vers $+\infty$ si pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n sont à une distance de l inférieure à ϵ .

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.


Remarque.

- La condition « u_n est à une distance de l inférieure à ϵ » peut s'écrire

$$|u_n - l| \leq \epsilon$$

- On dit qu'une suite est convergente lorsqu'elle admet une limite finie l lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème 2.7 – des gendarmes

Soient u, v, w trois suites et soit $l \in \mathbb{R}$.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, et que $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$. Alors la suite v est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l.$$

Théorème 2.8 – convergence monotone

Toute suite croissante et majorée converge.

Remarque. On sait de plus que si une suite est croissante et qu'elle n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.



II Suites arithmétiques

Définition 2.9

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

- **Expression par récurrence :** $u_{n+1} = u_n + r$
- **Expression explicite :** $u_n = u_0 + nr$
- **Somme des termes :** nbre termes $\times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

À retenir : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 25. On place 300 euros à un taux de 5% (taux d'intérêts simples). Quelle est la valeur du capitale au bout de 4 ans ? Combien d'années doit-on attendre pour que le capital atteigne 400 euros ?

III Suites géométriques

Définition 2.10

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **géométrique** s'il existe $q \neq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q u_n$$

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

- **Expression par récurrence :** $u_{n+1} = q u_n$
- **Expression explicite :** $u_n = u_0 q^n$
- **Somme des termes :** premier terme $\times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbre termes}}}{1 - \text{raison}}$.

Exemple 26. Calculer $\sum_{k=0}^{10} 2^k$.

Exemple 27. On place 300 euros à un taux de 5% (taux d'intérêts composés). Quelle est la valeur du capital au bout de 4 ans ? Combien d'années doit-on attendre pour que le capital atteigne 400 euros ?



IV Suites arithmético-géométriques

Définition 2.11

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a u_n + b$$

Méthode – Expression des suites arithmético-géométriques

Pour déterminer les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b$,

- On commence par déterminer une suite constante égale à un réel c vérifiant la relation de récurrence.
- On pose $v_n = u_n - c$.
- On montre que v_n est une suite géométrique pour en déduire l'expression de v_n puis de u_n .

Exemple 28. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n + 3$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

V Suites récurrentes d'ordre deux

Proposition 2.12

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$). On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On considère l'équation $x^2 = ax + b$ dont le discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$.

- Si l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 (c'est-à-dire si $\Delta > 0$), alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique solution réelle r_0 (c'est-à-dire si $\Delta = 0$), alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n.$$

- Si l'équation $x^2 = ax + b$ n'admet aucune solution réelle (c'est-à-dire si $\Delta < 0$), en posant $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{a}$, alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \sqrt{-b}^n \cos(\theta n) + \mu \sqrt{-b}^n \sin(\theta n).$$

Exemple 29. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .



Chapitre 3

Fonctions bijectives et réciproques

Définition 3.1 – Fonction bijective

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On dit que f est bijective si chaque élément de F a exactement un antécédent par f .

Remarque. Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on dit aussi que f est une bijection, ou encore qu'elle réalise une bijection de E vers F .

Exemple 30. Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est bijective ou non.

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - 1 \end{cases}$

Exemple 31. Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est bijective ou non.

1. $g_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$
2. $g_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$
3. $g_3 : \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$

Théorème 3.2

Une fonction $f : E \rightarrow F$ est bijective si, et seulement si, il existe une fonction $g : F \rightarrow E$ telle que :

$$\text{pour tout } x \in E, \quad g \circ f(x) = x \text{ et pour tout } y \in F, \\ f \circ g(y) = y.$$

De plus, la fonction g est unique. On l'appelle la bijection réciproque de f , et on la note f^{-1} .

Les deux exemples suivants sont fondamentaux et sont à avoir « en tête » lorsque l'on parle de fonctions réciproques.

Exemple 32.

Exemple 33.

Méthode – Montrer qu'une fonction est bijective et déterminer sa réciproque

On résout $y = f(x)$ afin de montrer que cette équation admet une unique solution quel que soit $y \in F$. On obtient une équivalence de la forme $y = f(x) \iff x = g(y)$. La réciproque de f est alors g .

Exemple 34. Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x - 1 \end{cases}$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Proposition 3.3 – Représentation graphique

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective. Alors la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Exemple 35. Tracer les courbes des fonctions $\exp$ et $\ln$ afin d'illustrer la symétrie indiquée par la proposition 3.3.



Chapitre 4

Continuité

Dans toute ce chapitre, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$.

I Définitions et généralités

Définition 4.1 – Limite en un point

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in D$. On dit que f admet la limite $l \in \mathbb{R}$ en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D \cap]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$,

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Définition 4.2 – Continuité en un point

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in D$. On dit que f est continue en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Définition 4.3 – Continuité sur un ensemble

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue sur D si pour tout $a \in D$, f est continue en a .

Exemple 36. La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{1}{x}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^*$?

Théorème 4.4

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$. Alors f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Définition 4.5 – Ensemble image

Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **ensemble image de D par f** l'ensemble :

$$\begin{aligned} f(D) &= \{f(x), \text{ tel que } x \in D\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}, \text{ tel que } y \text{ admet un antécédent par } f\} \end{aligned}$$

Exemple 37. Soit $f : x \mapsto x^2$. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f([1; 2])$, $f([-6 - 1])$ et $f([-2; 1])$.

II Théorème des valeurs intermédiaires

On donne plusieurs versions du théorème des valeurs intermédiaires (TVI), en commençant par la version rencontrée au lycée.

II.1 TVI, version 1**Théorème 4.6 – Valeurs intermédiaires**

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $f(a) < c < f(b)$ alors il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = c$.

Corollaire 4.7

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante.

Si $f(a) < c < f(b)$ alors il existe un unique réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = c$.

Remarque. Le corollaire peut également s'énoncer pour une fonction strictement décroissante en supposant alors que $f(b) < c < f(a)$.

II.2 TVI, version 2**Théorème 4.8 – Valeurs intermédiaires**

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire 4.9 – Théorème de la bijection

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors $f(I)$ est un intervalle et la fonction $f : I \rightarrow f(I)$ est bijective.



Proposition 4.10

Si $f : I \longrightarrow f(I)$ est une fonction bijective et continue, alors f^{-1} est continue.

Exemple 38. Si I et J sont deux intervalles et si $f : I \longrightarrow J$ est bijective, est-elle nécessairement continue? strictement monotone?

Exemple 39. Montrer que si $f : I \longrightarrow f(I)$ est une fonction bijective et continue, alors f est nécessairement strictement monotone.

III Théorème des bornes atteintes

Le théorème suivant est très utile en pratique même si sa démonstration est plus délicate et hors programme dans le cadre de ce cours.

III.1 Théorème des bornes atteintes, version 1

Théorème 4.11 – bornes atteintes

Si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue définie sur le segment $[a; b]$, alors f est bornée et elle atteint ses bornes (son minimum et son maximum).

Autrement dit, il existe $M \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $x_0 \in [a; b]$ et $x_1 \in [a; b]$ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in [a; b], & m \leq f(x) \leq M \\ f(x_0) = m \\ f(x_1) = M \end{cases}$$

Remarque. Par définition, un segment est un intervalle fermé et borné.

Exemple 40. Le théorème des bornes atteintes est-il vrai si on remplace le segment $[a; b]$ par l'intervalle ouvert $]a; b[$?

III.2 Théorème des bornes atteintes, version 2

Théorème 4.12 – bornes atteintes

Si I est un segment, et si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $f(I)$ est un segment.

Remarque.

- Cette version découle de la première version du théorème des bornes atteintes et du TVI. En effet, le TVI (version 3) assure que $f(I)$ est un intervalle. De plus, cet intervalle est borné (car f est bornée d'après le théorème 4.11) et il est fermé (car la fonction atteint ses bornes).



- *On pourra retenir la formulation suivante : « l'image continue d'un segment est un segment ».*



Chapitre 5

Dérivabilité

I Dérivée, différentielle et élasticité

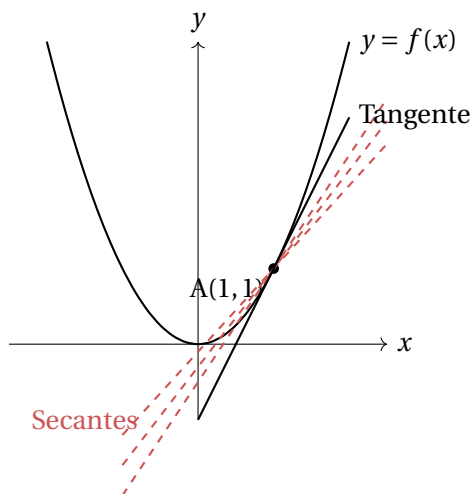
Définition 5.1 – Nombre dérivé

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

On appelle **nombre dérivé** cette limite et on la note $f'(a)$. On a donc :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- Graphiquement, le nombre dérivé $f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a .



- En écrivant $\Delta x = (a+h) - a$ et $\Delta f = f(a+h) - f(a)$, on voit que $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Cela conduit à noter $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

Proposition 5.2

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a .

Remarque. La réciproque est néanmoins fausse. Il suffit par exemple de considérer la fonction valeur absolue en $a = 0$ pour s'en convaincre.

Définition 5.3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable en tout point $a \in I$, on dit que f est dérivable sur I . On définit alors la fonction dérivée de f par

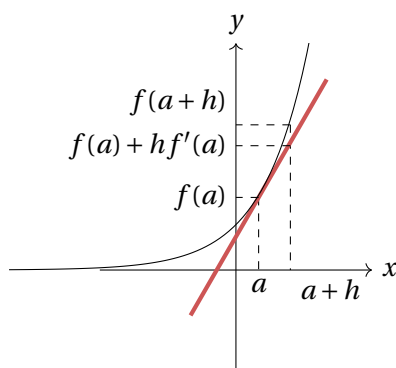
$$f' : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$$

Proposition 5.4 – Équation de la tangente

Soit f une fonction dérivable en a . L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(a; f(a))$ est :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

En approximant une courbe par sa tangente et en posant $x = a + h$, on peut, pour h proche de 0, écrire : $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$.



Exemple 41. On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Donner une valeur approchée du coût de production de 203 unités de biens.

Remarque.



- $C'(200)$ correspond au coût de production d'une unité de biens supplémentaire.
- $\frac{C(200)}{200} = 0,5$ est le coût moyen de production de 200 unités de biens.

Définition 5.5

En économie, si f est une fonction,

- on appelle **fonction moyenne** de f la fonction f_M définie par $f_M(x) = \frac{f(x)}{x}$.
- on appelle **fonction marginale** de f la fonction f_m définie par $f_m(x) = f'(x)$.

En approchant la fonction f par sa tangente, on voit que $f_m(x) \approx f(x+1) - f(x)$.

Donc $f_m(x)$ est la variation de f correspondant à une augmentation de x de 1 unité.

Retour sur l'exercice précédent :

La production passe de 200 à 203. Le coût passe alors de 100 à 100,9.

Cela correspond à un coût marginal de

$$C'(200) = \frac{dC}{dq}(200) \approx \frac{100,9 - 100}{203 - 200} \approx 0,3.$$

D'un point de vue économique, il est préférable de raisonner en pourcentage.

Ainsi, on définit la notion d'élasticité correspondant à

$$\frac{\frac{\Delta C}{C}}{\frac{\Delta q}{q}} = \frac{\Delta C}{\Delta q} \times \frac{q}{C}.$$

Définition 5.6 – Élasticité arc

Soit $f : I \subset]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a, b \in I$ tels que $f(a) \neq 0$. On appelle **élasticité** de f entre a et b le réel

$$\epsilon_f(a, b) = \frac{\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}}{\frac{b - a}{a}}.$$

Définition 5.7 – Élasticité ponctuelle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $x_0 > 0$ et $f(x_0) \neq 0$. On appelle **élasticité** de f au point a le réel

$$\epsilon_f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{f(a)}}{\frac{h}{a}} = \frac{af'(a)}{f(a)}.$$

- L'élasticité d'une fonction en un point est donc le rapport de sa valeur marginale et de sa valeur moyenne :

$$\epsilon_f(x) = \frac{f_m(x)}{fM(x)}.$$
- Si en un point x , $|\epsilon_f(x)| > 1$, on dit que f est **élastique** en x . Si $|\epsilon_f(x)| < 1$, on dit que f est **inélastique** en x . Enfin, si $|\epsilon_f(x)| = 1$, on dit que f est d'**élasticité unitaire** en x .

Exemple 42. On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Déterminer l'élasticité de C au point 200. Interpréter.

Autres Applications classiques

- Si la demande Q d'un bien dépend des revenus R , $\epsilon_Q(R)$ est appelée l'**élasticité-revenus**.
- Si elle dépend du prix P , $\epsilon_Q(P)$ est appelée l'**élasticité-prix**.

Définition 5.8 – Différentielle

Soit f une fonction dérivable en $a \in I$. On appelle différentielle de f en a , notée df_a , l'application :

$$df_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & f'(a)h \end{cases}$$

Remarque. On écrira donc $df_a(h) = f'(a)h$. Si h est petit, on se représentera le nombre $df_a(h)$ comme la variation de f lorsque l'on se place au point a et que l'on fait varier x d'une quantité h . On utilise parfois, par abus de notation, les égalités suivantes qui ont la même signification :

$$df_a(dx) = f'(a)dx \quad df_a = f'(a)dx \quad df = f'dx$$

Exemple 43.



II Dérivation des fonctions réciproques

Proposition 5.9

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective et soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Exemple 44.

III Accroissements finis

III.1 Théorème de Rolle

On commence par énoncer le théorème de Rolle qui est un cas particulier du théorème des accroissements finis mais qui est plus simple à démontrer.

Théorème 5.10 – Rolle

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a; b]$. On suppose de plus que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

III.2 Théorème des accroissement finis

Le théorème de Rolle se généralise de la façon suivante.

Théorème 5.11 – Accroissements finis

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a; b]$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Remarque. Graphiquement, cela signifie que, pour une fonction suffisamment régulière, lorsque l'on considère deux points A et B d'abscisses respectives a et b sur la courbe, il existe toujours un point entre a et b dont la tangente est parallèle à la sécante [AB].

Corollaire 5.12

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.

Remarque. On a le même résultat en remplaçant positif par négatif et croissant par décroissant. Notons par ailleurs que la réciproque du deuxième point est fausse.

III.3 Inégalité des accroissements finis

Proposition 5.13 – Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . On suppose de plus que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$. Alors, pour tous $x, y \in I$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Remarque. La proposition 5.13 peut s'interpréter en économie : si le coût marginal (c'est-à-dire le coût de production d'une unité supplémentaire) est toujours inférieure à M (en valeur absolue), la variation du coût total sera inférieur au produit de M par la quantité de biens produite.

IV Dérivées d'ordre supérieur

Définition 5.14 – Dérivées d'ordre supérieur

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

- Si f' est dérivable sur I , on dit que f est deux fois dérivable sur I et on note $f'' = (f')'$.
- De manière générale, par récurrence : si f' est $n-1$ fois dérivable, on dit que f est n fois dérivable et on note $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.

Définition 5.15 – Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

- Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur I et que la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I , on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$.
- Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \geq 1$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque. Comme une fonction dérivable est toujours continue, on peut dire plus simplement qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est une fonction dérivable une infinité de fois.

V Formules de Taylor

L'idée générale de cette partie est d'approcher localement une fonction par un polynôme. Cela permet de simplifier certains calculs et est utile dans le calcul de limites par exemple.

Dans toute cette partie, on considère donc une fonction f et un réel x_0 au voisinage duquel on souhaite approcher f .



V.1 Développements à l'ordre 1

Si l'on veut approcher f par un polynôme de degré 1 (une fonction affine), on va l'approcher naturellement par la tangente en x_0 .

Ainsi, pour x proche de a ,

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 5.16

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Alors il existe une fonction ϵ définie sur $V_0 \subset I$, un voisinage de 0, telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ et telle que pour tout $h \in V_0$,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h).$$

Remarque.

- Le terme $h\epsilon(h)$ mesure ainsi l'erreur commise entre la courbe et sa tangente.
- En posant, $x = a + h$, une autre façon d'écrire l'égalité de la proposition 5.16 est :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\epsilon(x - a).$$

V.2 Développements de Taylor à l'ordre n

Proposition 5.17 – Formule de Taylor-Young (admise)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable en a . Alors, il existe une fonction ϵ définie sur V_0 , un voisinage de 0, telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ et telle que pour tout $h \in V_0$,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n\epsilon(h)$$

La formule de Taylor Young s'applique classiquement aux fonctions suivantes **au voisinage de 0** :

$\frac{1}{1-h}$	$= 1 + h + h^2 + \dots + h^n + h^n\epsilon(h)$	$= \sum_{k=0}^n h^k + h^n\epsilon(h)$
$\frac{1}{1+h}$	$= 1 - h + h^2 + \dots + (-1)^n h^n + h^n\epsilon(h)$	$= \sum_{k=0}^n (-1)^k h^k + h^n\epsilon(h)$
e^h	$= 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 \dots + \frac{1}{n!}h^n + h^n\epsilon(h)$	$= \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} + h^n\epsilon(h)$
$\ln(1+h)$	$= h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}h^n + h^n\epsilon(h)$	$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} h^k + h^n\epsilon(h)$
$(1+h)^\alpha$	$= 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}h^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}h^n + h^n\epsilon(h)$	$= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} h^k + h^n\epsilon(h)$



Remarque. Dans le développement limité de $(1+h)^\alpha$, α est un réel quelconque (positif ou négatif). Le terme $\binom{\alpha}{k}$ est, par définition, le réel défini par

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Dans le cas où α est entier, on retrouve la définition des coefficients binomiaux, ce qui justifie d'ailleurs la notation employée.

Exemple 45. Écrire le développement limité à l'ordre $n = 3$ de $f(h) = \sqrt{1+h}$ en 0.

Méthode – Calculer une limite avec un développement limité

Lorsque les méthodes classiques de calcul de limites ne fonctionnent pas, on se tourne vers les développements limités.

Exemple 46. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x(1-x)}$.

Remarque. Dans l'exercice précédent, on aurait pu faire apparaître le terme $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ et conclure grâce à un taux de variations. Ce genre d'astuce est néanmoins pas toujours facile à trouver et l'utilisation des développements limités est préférable.

Exemple 47. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.



Chapitre 6

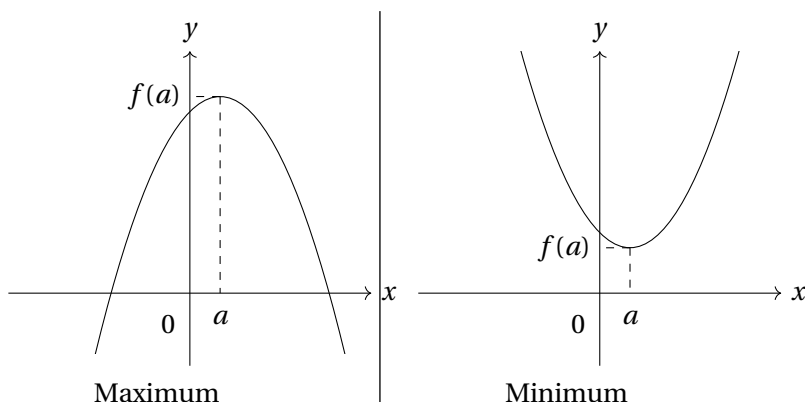
Optimisation et convexité

I Optimisation

Définition 6.1

Soit I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Dire que la fonction f admet un **maximum** en a sur l'intervalle I signifie que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq f(a)$.
- Dire que la fonction f admet un **minimum** en a sur l'intervalle I signifie que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geq f(a)$.
- Un **extremum** est un maximum ou un minimum.



Définition 6.2

Soit I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Dire que la fonction f admet un **maximum local** en a signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$, on a $f(x) \leq f(a)$.
- Dire que la fonction f admet un **minimum local** en a signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$, on a $f(x) \geq f(a)$.
- Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Remarque. La condition « pour tout $x \in I \cap]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$, on a $f(x) \geq f(a)$ » s'écrit aussi, de manière équivalente : « pour tout $x \in I$, $|x - a| < \varepsilon \implies f(x) \leq f(a)$ ».

Proposition 6.3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$. Si f admet un extremum (local) en a , alors $f'(a) = 0$.

Remarque. Attention, l'hypothèse « I est un intervalle ouvert est indispensable ». Pour s'en convaincre, il suffit de considérer par exemple la fonction $x \in [0; 1] \mapsto x^2$ qui admet un maximum en 1 mais dont la dérivée ne s'annule pas en 1.

Proposition 6.4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a \in I$.

- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a .
- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a .

Remarque. Cette preuve repose sur l'hypothèse que f est deux fois dérivable en a . Si $f''(a) = 0$, la nature de l'extremum ne peut pas être déterminée uniquement avec la dérivée seconde (il faut utiliser des dérivées d'ordre supérieur ou d'autres méthodes).

II Convexité

II.1 Définitions et caractérisation des fonctions convexes

Définition 6.5 – Fonction convexe

Une fonction $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ (où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle), est dite convexe si pour tous $x, y \in I$, pour tout $\lambda \in]0; 1[$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

De plus, si l'inégalité ci-dessus est stricte pour tout $\lambda \in]0; 1[$, on dit que f est strictement convexe.



Définition 6.6 – Fonction concave

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle), est dite concave si $-f$ est convexe, c'est-à-dire si pour tous $x, y \in I$, pour tout $\lambda \in]0; 1[$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

De plus, si l'inégalité ci-dessus est stricte pour tout $\lambda \in]0; 1[$, on dit que f est strictement concave.

Proposition 6.7 – Lemme des trois cordes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. f est convexe si, et seulement si, pour tous $x, y, z \in I$ avec $x < y < z$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Remarque. Il suffit même que l'une des deux inégalités soit vérifiée pour que f soit convexe.

On déduit alors le résultat suivant du lemme des trois cordes.

Corollaire 6.8

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

- f est convexe si, et seulement si, f' est croissante sur I .
- f est convexe si, et seulement si, f'' est positive sur I .

Avec le lemme des trois cordes, on peut également démontrer le théorème suivant qui signifie qu'une fonction convexe est au dessus de ses tangentes.

Proposition 6.9

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Alors f est convexe si, et seulement si, pour tous $a, x \in I$,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Remarque. Il est possible d'énoncer le lemme des trois cordes pour une fonction strictement convexe en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes. On en déduit alors qu'une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est strictement convexe si, et seulement si, f' est strictement croissante. De plus, en utilisant le fait que, si la dérivée d'une fonction est strictement positive sauf éventuellement en un nombre fini de points ou la dérivée s'annule, alors la fonction est strictement croissante, on en déduit le résultat suivant.



Proposition 6.10

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I . Si pour tout $x \in I$, $f''(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement convexe.

Remarque. Pour chaque proposition de cette partie (propositions 6.7 à 6.10), il est également possible d'énoncer des résultats analogues pour des fonctions concaves. Il suffit pour cela de changer le sens des inégalités. Les preuves de ces résultats se font simplement en appliquant à la fonction $-f$ les résultats relatifs à la convexité. En particulier, on a le résultat suivant.

Proposition 6.11

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

- f est concave si, et seulement si, f' est décroissante sur I .
- f est concave si, et seulement si, f'' est négative sur I .

II.2 Concavité des fonctions d'utilité

II.3 Convexité et optimisation

Proposition 6.12

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et soit $a \in I$. Si $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a .

Proposition 6.13

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave et soit $a \in I$. Si $f'(a) = 0$, alors f admet un maximum global en a .

III Quasi-convexité

Définition 6.14

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est **quasi-concave** si pour tout $x, y \in I$, pour tout $\lambda \in]0; 1[$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) \quad \text{ou} \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(y).$$



Définition 6.15

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est **quasi-concave** si pour tout $x, y \in I$, pour tout $\lambda \in]0; 1[$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) \quad \text{ou} \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(y).$$

Remarque. De manière équivalente, on peut dire qu'une fonction f est quasi-concave si pour tout $x, y \in I$, pour tout $\lambda \in]0; 1[$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x); f(y)\}.$$

De même, une fonction f est quasi-convexe si pour tout $x, y \in I$, pour tout $\lambda \in]0; 1[$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x); f(y)\}.$$

La notion de quasi-convexité généralise en fait celle de convexité dans le sens suivant :

Proposition 6.16

- Si f est convexe, alors f est quasi-convexe.
- si f est concave, alors f est quasi-concave.

Les propositions suivantes donnent enfin une caractérisation des fonctions quasi-convexes et quasi-concaves.

Proposition 6.17

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (où I est un intervalle) est quasi-convexe si, et seulement si, f est monotone où f est successivement décroissante puis croissante (dans le sens où il existe $x_0 \in I$ tel que f est décroissante sur $] -\infty; x_0] \cap I$ et croissante sur $[x_0; +\infty[\cap I$).

Proposition 6.18

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (où I est un intervalle) est quasi-concave si, et seulement si, f est monotone où f est successivement croissante puis décroissante (dans le sens où il existe $x_0 \in I$ tel que f est croissante sur $] -\infty; x_0] \cap I$ et décroissante sur $[x_0; +\infty[\cap I$).

Citons enfin l'un des avantages des fonctions quasi-convexes ou quasi-concaves en terme d'optimisation :

Proposition 6.19

- Si f est quasi-convexe, alors tout minimum local de f est un minimum global.
- Si f est quasi-concave, alors tout maximum local de f est un maximum global.

Chapitre 7

Calcul intégral

I Primitives

Dans ce qui suit, on considérera un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 7.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et vérifie : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Exemple 48.

Proposition 7.2 – Existence d'une primitive (admise)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I .

Proposition 7.3

Soit f une fonction continue sur I et F_0 une primitive de f sur I . Soit F une fonction dérivable sur I . Alors F est une primitive de f si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F = F_0 + k$.

Remarque. Autrement dit, les primitives d'une fonction différent d'une constante. Par ailleurs, comme les primitives ne sont pas uniques, on parle **d'une** primitive de f et non pas de **la** primitive de f .

Remarque. Le fait que I soit un intervalle est primordial. On a en effet utilisé le fait que si une fonction a une dérivée nulle, alors elle est constante. Si l'ensemble de définition n'est pas un intervalle, ce résultat est faux.

On peut par exemple penser à la fonction de Heaviside définie $H(x) = 1$ si $x > 0$ et 0 si $x < 0$. Sa dérivée est constante égale à 0 mais H n'est pas constante.

Remarque. Le calcul des primitives se fait à partir du tableau de calculs des dérivées, en le lisant en quelque sorte «à l'envers».

On pourra néanmoins retenir quelques formes à savoir identifier : $u' u$, $u' u^n$, $\frac{u'}{u}$ (se primitive en $\ln(|u|)$), $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

A retenir également que x^α se primitive en $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

II Intégrales : Définition et premières propriétés

Définition 7.4

Soit f une fonction définie sur I admettant une primitive F sur I . Soient a et b des éléments de I , on définit alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

On note aussi :

$$F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b.$$

Remarque.

- Dans l'expression $\int_a^b f(x) dx$, la variable x est muette, elle signifie qu'on cherche une primitive de f par rapport à x . On peut donc remplacer par t , s , u ... etc.
- Pour que la définition soit correcte, il faut démontrer qu'elle ne dépend pas de la primitive F choisie. Or, cela est bien le cas car, d'après la proposition 7.3, deux primitives diffèrent d'une constante. Ainsi, si F_1 et F_2 sont deux primitives de f , alors $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$.

Théorème 7.5 – (admis)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Remarque. Le théorème ci-dessus signifie que le réel $\int_a^b f(x) dx$ donne l'aire algébrique sous le graphe de la fonction f , comprise entre a et b .



Proposition 7.6

Soit f une application continue sur I et soit $a \in I$.

L'application $F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Remarque. Comme la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a , on notera souvent $\int f(x) dx$ (sans préciser les bornes de l'intégrale) l'ensemble des primitives de f . Il ne faut pas oublier que cela signifie $\int_a^x f(t) dt$ pour a quelconque.

Exemple 49. Calculer $\int e^{2x} dx$.

Les propriétés suivantes sont admises même si elles s'interprètent facilement en terme d'aire sous la courbe (la relation de Chasles par exemple).

Proposition 7.7 – (admise)

Soient f, g des fonctions continues sur I , et a, b, c des éléments de I .

1. **Relation de Chasles.**
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

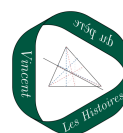
2. **Positivité de l'intégrale.** Si f est positive sur $[a, b]$ alors
$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

3. **Croissance de l'intégrale.** Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

4. **Linéarité de l'intégrale.** Pour tous λ, μ réels, on a :

$$\lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx.$$

5. **Inégalité triangulaire.**
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$



De plus, dès lors que la fonction à intégrer possède certaines propriétés particulières, on peut se ramener à un calcul simplifié de l'intégrale.

Proposition 7.8

Soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b des éléments de I .

- Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
- Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
- Si f est T -périodique alors $\int_{a+kT}^{b+kT} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ pour tout entier k .

Exemple 50. Calculer $\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$.

III Intégration par parties**Définition 7.9**

On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ si f est dérivable sur $[a, b]$ et si f' est une fonction continue sur $[a, b]$.

Théorème 7.10

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ alors :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt.$$

Exemple 51. Calculer $\int_0^1 t e^t dt$.

Exemple 52. Calculer $\int \ln(x) dx$.

Remarque. Lorsqu'on calcule des primitives par intégration par parties, on pourra omettre de noter les bornes. Dans l'exemple précédent, la quantité $a \ln(a) - a$ est de toute façon intégrée dans la constante k . Ainsi, on écrira :

$$\int \ln(x) dx = [x \ln(x)] - \int 1 dx = x \ln(x) - x + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$



IV Changement de variables

Théorème 7.11

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ et $g : \varphi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(u) du = \int_a^b \varphi'(t) \cdot g(\varphi(t)) dt.$$

Exemple 53. Calculer $I = \int_0^2 \frac{du}{1 + \sqrt{u}}$.

Remarque.

- En pratique, on écrira simplement « on pose $t = \sqrt{u}$ » en vérifiant que la fonction φ donnant l'ancienne variable en fonction de la nouvelle (la fonction carrée ici) est bien de classe $\mathcal{C}^1$.
- La difficulté provient du fait que le théorème s'applique avec l'application φ qui est la réciproque de l'application racine carrée qui est la changement de variable « naturel » à effectuer.
- Par ailleurs, en écrivant que $u = \varphi(t)$ et en utilisant la notation « des physiciens » pour la dérivée, on a $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)$. On peut ainsi retenir que $du = \varphi'(t)dt$ (bien que cela n'ait pas de sens mathématique) et que pour effectuer un changement de variable, il s'agit donc de remplacer « du » par son expression en fonction de t .
- Pour effectuer un changement de variable, on n'a pas besoin que φ soit injective. Cependant, on préfère souvent définir φ en définissant son application réciproque φ^{-1} (comme c'est le cas ci-dessous) et on utilise donc une application φ bijective.

Autre rédaction de l'exemple 53 :

Exemple 54. Calculer $\int \frac{1}{2x \ln(x) + x} dx$ sur $]1; +\infty[$.

Remarque. Là aussi, on peut omettre de noter les bornes des intégrales. On veillera cependant à ce que le changement de variable ($t = e^u$ ici) soit bien surjectif sur $]1; +\infty[$ afin pour toute valeur de $x \in]1; +\infty[$, il existe un antécédent (à placer dans la borne de la nouvelle intégrale).

Autre rédaction de l'exemple 54 :

On souhaite calculer $\int \frac{1}{2x \ln(x) + x} dx$ sur $]1; +\infty[$.

On pose $u = \ln(x)$.



- Le changement de variable $x = e^u$ est bien $\mathcal{C}^1$ et surjectif de $]0; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$.
- $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{e^u}$ donc $dx = e^u du$.

Ainsi,

$$\int \frac{1}{2x \ln(x) + x} dx = \int \frac{e^u}{2ue^u + e^u} du = \int \frac{1}{2u+1} = \frac{1}{2} \ln|1+2u| + k = \frac{1}{2} \ln(1+2\ln(x)) + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

V Primitives de fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes. Pour déterminer une primitive d'une fraction rationnelle, on utilise une méthode de décomposition en éléments simples. On ne donnera pas de résultat théorique à ce sujet mais on illustrera certaines techniques à travers des exemples de plus en plus sophistiqués.

Exemple 55. Calculer $\int \frac{1}{(x-2)(x-5)} dx$.