

Mathématiques pour économistes 1

Licence 1

2026/2027 : Semestre 1

Yannick VINCENT

Faculté d'économie de Montpellier

www.yannickvincent.fr

Table des matières

Vocabulaire mathématique	5
1 Logique et raisonnement	8
2 Suites numériques	10
3 Fonctions bijectives et réciproques	13
4 Continuité	14
5 Dérivabilité	16
6 Optimisation et convexité	19
7 Calcul intégral	21

Introduction

Quelques conseils pour progresser

Si chacun a ses propres habitudes en ce qui concerne les apprentissages, il existe néanmoins des méthodes plus efficaces que d'autres. Les éléments ci-dessous constituent une liste non-exhaustive de conseils qui peuvent être utiles et que chacun pourra s'approprier à sa façon.

En Cours et en TDs

- **Être attentif** est une condition indispensable pour comprendre. Cela signifie notamment le fait de toujours écouter les explications données par le professeur. Cela inclut y compris le fait de ne pas demander des explications à son voisin sur une notion que le professeur est justement en train d'expliquer. Il y a des temps prévus pour le travail en groupe (parfois en TD par exemple) et d'autres où il est nécessaire d'écouter. Ne pas respecter ces différents moments apportera de la confusion et ne vous permettra pas de progresser.

- **L'écoute en cours doit être active.** Lorsque l'on écoute un cours, il faut toujours se poser les questions suivantes :

1. Est-ce que j'ai compris exactement ce que dit le professeur?
2. Est-ce que je sais identifier précisément quelle proposition ou quelle définition on utilise dans le raisonnement?
3. Est-ce que je comprend globalement pourquoi on est en train de faire ce que l'on fait? (à quoi cela sert)

Cette dernière question étant d'ordre plus général, il est parfois nécessaire de la mettre provisoirement de côté afin de se concentrer dans un premier temps sur les aspects plus techniques. Cependant, il est toujours important d'y revenir par la suite car c'est cela qui vous permettra de vous approprier pleinement les notions et de leur donner un sens.

- **Poser des questions.** Le fait de poser des questions lorsque l'on ne comprend pas (en demandant simplement au professeur de réexpliquer) est ce qui permettra au professeur de se mettre à votre niveau et d'adapter au mieux son cours. Cela rendra les choses plus faciles pour tout le monde et vous permettra de mieux comprendre la suite. S'il n'est pas toujours possible de poser une question en amphithéâtre, les Travaux Dirigés sont en revanche un lieu privilégié pour le faire.

- **Noter les passages pas clairs** (en faisant une petite croix dans la marge par exemple) est une astuce à retenir pour pouvoir revenir dessus après le cours. Dans le cas où vous êtes un peu perdu, il est inutile de paniquer mais il faut faire l'effort de s'accrocher. Il y a en fait pleins d'occasions de reprendre le fil : lorsque l'on termine une démonstration compliquée et que l'on passe à un autre théorème par exemple.
- **Lors des Travaux Dirigés**, il est nécessaire de ne pas attendre la correction mais de chercher activement les exercices. C'est notamment un moment privilégié pour revenir sur une méthode classique vue en cours afin de l'assimiler. Lorsque l'on ne sait pas faire un exercice, une erreur classique est de se tourner tout de suite vers un camarade pour demander des explications. Si la collaboration est quelque chose d'important, il est néanmoins tout aussi important de commencer à chercher un exercice seul. Ce n'est qu'après avoir bien cerné et identifié vos propres difficultés face à cet exercice que vous pourrez poser une questions plus précise à un camarade. Là aussi, il s'agit finalement de toujours être actif face aux apprentissages.
- Le point précédent ne doit pas masquer toute **l'importance de s'entraider entre camarades**. L'entraide est d'ailleurs tout aussi importante pour celui qui se fait aider que pour celui qui aide. Expliquer quelque chose permet en effet de s'assurer que l'on a bien compris soi-même. La collaboration entre étudiants est donc tout à fait importante. Il y a simplement un moment pour le faire.

À la maison

- **Travailler régulièrement** en revoyant systématiquement son cours avant le cours suivant et en faisant des exercices est indispensable. Travailler avec des camarades en allant par exemple à la Bibliothèque peut d'ailleurs être un bon moyen de se motiver.
- **Revoir le cours** ne signifie pas simplement le lire. Cela se fait nécessairement un crayon à la main pour refaire les exemples. Il faut par ailleurs connaître les définitions et les propositions de manière précise, sans oublier aucune hypothèse, et savoir les réciter. Cela ne doit pas être approximatif car c'est en connaissant bien le contenu de votre cours que vous pourrez résoudre des exercices sans vous tromper.
- **Faire et refaire des exercices**. Étant donné que les évaluations consistent majoritairement à résoudre des exercices, il est clair qu'il est important de s'entraîner à cela. Là aussi, il ne faut pas se contenter de relire les exercices vus en classe mais s'assurer que l'on est capable de les refaire, crayon en main. Tant que l'on est pas capable de refaire l'exercice sans aide du corrigé, il faut considérer que les notions ne sont pas complètement acquises et qu'il faudra donc refaire les exercices en questions le lendemain ou quelques jours plus tard. À noter que des exercices supplémentaires ainsi que des capsules vidéos sur le contenu du cours sont disponibles en ligne sur la page du cours.
- Il est important de savoir **trouver un équilibre entre l'apprentissage du cours et la résolution d'exercices**. Parfois, certains étudiants pensent que le fait de connaître précisément le cours est inutile car ce n'est pas ce qui sera directement évalué. C'est une erreur car c'est justement la connaissance du cours qui vous permettra de savoir si vous avez le droit d'utiliser un théorème ou non, et vous évitera de tomber dans les pièges classiques. A contrario, apprendre son cours sans faire d'exercices n'est pas une stratégie efficace. Il faut donc apprendre à gérer son planning de révisions afin de travailler à la fois le cours et les exercices.

- **Faire des fiches synthèses** peut également être une bonne idée tant pour mémoriser le cours que les méthodes vues en TD.

Lettres grecques

En mathématiques, il est d'usage de nommer de manière semblable des objets de même nature. Par exemple, si un exercice utilise trois nombres réels, on les notera souvent x , y et z . Si l'on introduit des fonctions, on les notera f , g et h . Pour des points géométriques, on utilisera plutôt les lettres A, B et C, *etc.* Cela facilite la compréhension mais nécessite bien souvent d'utiliser beaucoup de symboles. C'est pourquoi les mathématiques utilisent très régulièrement les lettres grecques et qu'il faut les **connaître absolument**.

Nom	Minuscule	Majuscule
Alpha	α	A
Bêta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ	E
Zêta	ζ	Z
Êta	η	H
Thêta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	M
Nu	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omicron	o	O
Pi	π	Π
Rhô	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Upsilon	υ	Υ
Phi	ϕ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Oméga	ω	Ω

Vocabulaire mathématique

Les points « Étymologie » sont extraits de *Les mots et les maths, dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique*, Bertrand Hauchecorne, 2014, ellipses.

Mathématiques

Étymologie : Le mot *mathématique* nous vient du grec *mathema* ou plutôt de son pluriel *mathe-mata*. ce mot désignait aussi bien le fait d'apprendre que son résultat : la connaissance, la science. Sous l'influence de Platon et d'Aristote pour qui les mathématiques sont un avoir fondamental, le

mot se spécialise dans ce que nous appelons les mathématiques, au sens le plus large.

L'usage du pluriel *mathématiques* est un héritage de l'époque antique et médiévale où le *quadrivium* regroupait les quatre *ars mathematica* : l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie et la musique.

Plus tard, au XVIII^e siècle, on parle des mathématiques sans doute avec l'idée que cette matière englobe des disciplines devenues différentes comme la géométrie, l'algèbre ou même des branches classeront de nos jours en physique. L'utilisation du pluriel semblait en tout cas tout à fait correspondre avec cette pluralité.

Au XX^e siècle, à la suite de Bourbaki (Jean Dieudonné en particulier), certains mathématicien-ne-s privilégient l'utilisation du singulier *mathématique* afin d'insister sur l'unité qui existe entre les différentes parties des mathématiques.

Définition

Une définition est acceptée sans démonstration puisqu'elle donne simplement la signification d'un terme à l'aide de concepts déjà définis antérieurement. La nouvelle notion doit toutefois être définie sans ambiguïté, ce qui explique que l'on puisse trouver des éléments de preuve sous une définition mathématique. Pour ainsi dire, c'est comme si la définition pouvait se diviser en deux parties : une première partie énonçant une proposition (assurant une existence ou une unicité par exemple) et une seconde partie constituant la définition à proprement parler.

Étymologie : Les mathématiques utilisent de nos jours des concepts définis avec soin afin d'établir des théorèmes précis. Il faut cependant attendre le XVI^e siècle, avec le souci de rigueur insufflé à la Renaissance, pour que ce besoin se fasse sentir. Le mot *définition* est un calque du latin *definitio*. Ce dernier désigne une indication précise. On y sent encore l'idée étymologique de marquer une limite. *Définition* n'est d'abord utilisé que pour donner le sens d'un mot. Il faut attendre le XVI^e siècle pour que son sens s'étende à la définition d'un concept.

Proposition

En logique, il s'agit d'une phrase qui ne peut être que vraie ou fausse (principe du tiers exclu).

En mathématiques, il s'agit d'un énoncé qui est vrai. Dans un cours de mathématiques, une proposition est toujours démontrée. Énoncée sous une forme « Si A alors B », on dit que A constitue les hypothèses et que B est la conclusion de la proposition.

Étymologie : Proposer, c'est *poser en avant*. Déjà dans l'Antiquité, *propositio* s'utilise en logique. Repris au XIII^e siècle en français, *proposition* désigne un énoncé soumis au consentement des autres.

Théorème

En mathématiques, il est d'usage de réserver le terme *théorème* aux propositions considérées comme particulièrement intéressantes ou importantes. D'un point de vue purement logique, rien ne distingue *théorème* et *proposition*. La différence est plutôt d'ordre subjectif.

Étymologie : Le mot *théorème* est construit sur deux racines grecques. la première *thea* désigne le spectacle, on la reconnaît dans *théâtre* et *théorie*. La seconde signifie *observer* ou *contempler*. On la retrouve elle aussi dans *théorie* mais aussi dans *panorama*. *Theorema* désignait à la fois la fête, la méditation et l'objet d'étude. Au début, la pensée mathématique grecque était basée sur l'observation. La rupture fondamentale de ce peuple est de s'être ensuite soucié de justifier un résultat plutôt que de se contenter de l'établir. Le sens du mot *theorema* évolue parallèlement. À l'époque tardive puis chez les Romains il signifie *proposition démontrable*. Bien sûr, la notion de preuve n'était pas celle que nous connaissons de nos jours. Cependant, on peut dire que le mot avait déjà pris le sens actuel. À la Renaissance le souci de démonstration réapparaît en mathématiques. Le mot *théorème* est repris et francisé en 1539.

Axiome

En mathématiques, le mot axiome désignait une proposition qui est évidente en soi dans la tradition mathématique des *Éléments* d'Euclide. L'axiome est utilisé désormais, en mathématique, pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. De ce fait, un axiome est accepté sans démonstration. L'ensemble des axiomes d'une théorie doit être non contradictoire.

Étymologie : Dans son sens premier *axiōma* désignait pour les Grecs *prix, valeur* puis par extension ce qui paraît juste, convenable. L'adjectif *axiōmatikos* désignait ce qui a un air de dignité ou d'autorité. Le mot est repris en latin puis en français à la Renaissance, époque à laquelle il est utilisé en chirurgie. Il faut attendre le siècle suivant pour voir les mathématiciens puis les philosophes l'employer. Le développement de la logique mathématique donne ensuite une place importante à l'adjectif *axiomatique*.

Postulat

Étymologie : Ce mot est introduit au XVIII^e siècle par des mathématiciens travaillant sur Euclide et son cinquième postulat. Il est forgé sur le verbe latin *postulare, demander, souhaiter*. Il désignait une proposition, non nécessairement évidente, que l'on supposait sans pouvoir la démontrer. Il se différenciait à l'époque d'un axiome, vérité évidente en soi mais qu'on ne pouvait démontrer. De nos jours, cette différence n'a plus de sens. Une théorie est basée sur des axiomes : ils sont le principe de base. Leur évidence est fonction de ce qu'elle est censée représenter et n'est plus du domaine de la théorie elle-même.

Lemme

C'est une proposition technique, parfois difficile, mais qui n'a pas d'autre application que de permettre la démonstration d'un théorème. Il arrive qu'avec le temps, ce qui semblait un résultat intermédiaire apparaisse comme une proposition fondamentale et devienne un théorème. Parfois, pour des raisons historiques, le nom de *lemme* lui reste accolé. C'est par exemple le cas du lemme de Gauss en arithmétique.

Étymologie : Dans l'Antiquité, *lemme* était un terme de logique. Il désignait la majeure du syllogisme, c'est-à-dire la première assertion. Ainsi, dans la dialectique grecque, le lemme, le problème et l'épiphore sont les trois parties de l'argument. Par extension, le mot désigne ensuite en mathématiques l'un des arguments de la preuve sans en être le fondement.

Corollaire

C'est une proposition qui découle clairement (donc sans démonstration ou presque) d'un théorème établi.

Étymologie : Du latin *corolla* qui signifie petite couronne. *Corollaire* désigne quelque chose d'aucune valeur, de gratuit. Il apparaît puis se spécialise dans son sens mathématique au XVII^e siècle.

Conjecture

Il s'agit d'une proposition non démontrée et que les mathématicien-ne-s cherchent à démontrer. Poser une conjecture est un processus fondamental dans la recherche en mathématiques. Les conjectures les plus célèbres qui ont été démontrées récemment sont, sans doute, le grand théorème de Fermat et la conjecture de Poincaré.

Étymologie : du latin *conjectura*, dérivé de *cum* et *jacio* (littéralement jeté avec).

Chapitre 1

Logique et raisonnement

Fin du cours du 17 septembre 2026

Exercices

Exercice 1.

1. Quelle est la différence entre les notations f et $f(x)$?
2. Quelle est la différence entre les notations u_n et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 2. Parmi les énoncés ci-dessous, lesquels sont des définitions ? des propositions ? Pour les propositions, indiquer quelles sont les hypothèses et la conclusion.

1. Un triangle rectangle est un triangle dont l'un des angles mesure 90° .
2. Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
3. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ deux nombres pairs. L'entier $n + m$ est pair.
4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est croissante si pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, on a : $f(a) \leq f(b)$.
5. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I . Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
6. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$.

Exercice 3. Pour chacune des propositions économiques suivantes, on demande de :

1. identifier clairement l'hypothèse P et la conclusion Q ;
2. énoncer la réciproque ;
3. énoncer la contraposée ;
4. énoncer la négation.

Proposition A. Si une entreprise est en situation de monopole, alors elle peut fixer son prix au-dessus du coût marginal.

Proposition B. Si le taux d'intérêt directeur augmente, alors l'investissement des entreprises diminue.

Proposition C. Si une fonction de production est à rendements d'échelle constants, alors elle est homogène de degré 1.

Proposition D. Pour tout consommateur, si son revenu augmente et que le bien est normal, alors sa consommation de ce bien augmente.

Exercice 4. Compléter les pointillés par le connecteur logique le plus approprié (choisi parmi $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow$).

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \dots x = 2$.

2. $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $n + p$ est pair ... n et p sont pairs.

Exercice 5. Compléter avec il faut, il suffit ou il faut et il suffit, puis écrire la proposition en langage formel en utilisant une implication.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour qu'il existe m appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $m^2 = n$, ... que n soit positif ou nul.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour qu'il existe t appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $t^2 = x$, ... que x soit positif ou nul.

Exercice 6. On considère les quatre propositions suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}$, $x + y > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}$; $y^2 > x$
 - (a) Chacune de ces assertions est-elle vraie ou fausse?
 - (b) Donner leur négation.

Exercice 7. On considère les quatre propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < 0 \Rightarrow x \leq 0$
3. $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}$, $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$
4. $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}$, $x^2 = y^2 \Rightarrow |x| \leq |y|$
 - (a) Chacune de ces assertions est-elle vraie ou fausse?
 - (b) Énoncer leur négation.
 - (c) Énoncer leur contraposée.
 - (d) Énoncer leur réciproque. Est-elle vraie ou fausse?

Exercice 8. Les différentes phrases sont-elles vraies ou fausses?

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq y$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq y$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}$, $y < x$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $y < x$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y$.

Exercice 9. Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 5\alpha + 2\beta = 4 \\ 6\alpha - 3\beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15\gamma + 2\delta = 7 \\ \gamma - 7\delta = 2 \end{cases}$$

Exercice 10. Montrer que la somme de deux nombres entiers naturels impairs est un nombre pair.

Exercice 11. Déterminer l'ensemble des solutions des inéquations réelles suivantes par disjonction de cas :

1. $|x + 1| \leq |2x - 5|$
2. $|x - 3| > |3x + 6|$

Exercice 12. Montrer que pour tout $n \geq 5$,

$$n^2 < 2^n$$

Exercice 13. Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, alors $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Exercice 14. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \times f(y) - f(x \times y) = x + y.$$

Exercice 15. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Représenter les ensembles A et B par des diagrammes et hachurer les ensembles indiqués.

- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $A^c \cap B$
- $A^c \cup B^c$
- $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

Exercice 16. Soient Φ et Ψ deux sous-ensembles d'un ensemble Ω . Simplifier l'ensemble suivant :

$$\Gamma = (\Phi^c \cup (\Psi^c \cap \Phi))^c.$$

Exercice 17.

1. Soient $A_1 = [0; 1]$, $A_2 =]0; 1[\cup]2; 3]$, $B_1 = [0; 2]$ et $B_2 = [0; +\infty[$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, représenter les ensembles $A_1 \times B_1$ et $A_2 \times B_2$.
2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que D ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux ensembles.

Chapitre 2

Suites numériques

Exercices

Exercice 18. Pour chacune des suites ci-dessous définies par récurrence, déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

1. $u_{n+1} = 3u_n$ avec $u_0 = 2$
2. $u_{n+1} = u_n - 5$ avec $u_1 = 1$
3. $u_{n+1} = 3u_n - 6$ avec $u_0 = 1$
4. $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$
5. $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$
6. $u_{n+2} = -2u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$

Exercice 19. On considère que, à partir d'une année 0, la consommation de produit de communications augmente (en euros) de 10% chaque année. Au bout de combien d'années, la consommation aura doublé ?

Exercice 20. Au 1^{er} janvier 2020, le prix d'un litre d'eau pétillante est de 0,70€. On considère que chaque 1^{er} juin, le prix du lait baisse de 10% et que tous les 1^{er} décembre, il monte de 10%. Déterminer le prix du litre d'eau pétillante au 1^{er} janvier 2025 :

- a. calculé de manière exacte
- b. en supposant que tout nouveau prix est arrondi au centime le plus proche.

Exercice 21.

Partie A

On emprunte P euros auprès d'une banque (sans apport), au taux d'intérêts composés r (avec $r > 0$). Le capital restant dû est donc, au départ, de $C_0 = P$.

Chaque année, une somme correspondant aux intérêts est donc prélevée sur le capital puis on verse une somme V pour rembourser le prêt. On note C_n le capital restant dû à l'année n .

1. Déterminer l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n .
2. En déduire l'expression de C_n en fonction de n .
3. Montrer que l'on pourra rembourser le prêt en un nombre fini d'années à la condition que $V > Pr$.
4. On se place dans le cas où $V > Pr$ et on note N le nombre d'années nécessaire pour rembourser l'intégralité du prêt. Montrer que

$$P = \frac{V}{r} \left(1 - \left(\frac{1}{1+r} \right)^N \right)$$

Partie B

On suppose maintenant que le versement à la fin de chaque année n'est plus constant. On note V_n (pour $n \geq 1$) la somme versée à l'année n (à noter que V_n peut éventuellement être négatif dans le cas d'un prêt additionnel). On note toujours C_n le capital restant dû à l'année n avec $C_0 = P$.

1. Exprimer C_n en fonction de C_{n-1} et de V_n (pour $n \geq 1$).
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{C_n}{(1+r)^n} = P - \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{(1+r)^k}.$$

3. On suppose que le prêt pourra être remboursé en N années. Montrer qu'alors

$$P = \sum_{k=1}^N \frac{V_k}{(1+r)^k}.$$

4. Dans le cas où (V_n) est une suite constante, montrer que l'on retrouve le résultat de la partie A.
5. Une entreprise publique souhaite décider si elle va développer son parc hydro-électrique en construisant un nouveau barrage. Le projet présente les caractéristiques suivantes :
 - Coût de construction :
 - 200 million d'euros : Immédiatement
 - 100 million d'euros : à la fin de chacune des trois années suivantes.
 - Coût d'exploitation : 5 millions d'euros : à la fin de la quatrième année puis à la fin de chaque année (sans limite de temps)
 - Revenu : 30 millions d'euros : à la fin de la quatrième année puis à la fin de chaque année (sans limite de temps)

Sachant que le taux d'intérêt est fixé à 6%, le projet peut-il être rentabilisé ?

Exercice 22. Multiplicateurs keynésien

Voici la description d'un multiplicateur keynésien donné par Wikipédia :

L'État dispose, dans le cadre de sa politique budgétaire, de la possibilité de dépenser de l'argent public. 100 euros dépensés par l'État donnent lieu à une commande du même montant, qui va accroître le revenu du bénéficiaire. Revenu qui sera à son tour utilisé en dépense ou en épargne. Si le taux d'épargne des bénéficiaires est de 20 %, ces 100 euros vont générer une nouvelle dépense de $(100 - 20) = 80$ euros. Cette somme est aussi utilisée par son bénéficiaire, qui peut aussi — après avoir épargné 20 % — dépenser $(80 - 16) = 64$ euros. Il y a à ce stade, 20 euros d'épargne pour le premier bénéficiaire, 16 euros d'épargne et 64 euros dépensés pour le second, soit une somme totale de 100 euros. Et ainsi de suite jusqu'à épuisement de l'effet : les sommes redistribuées à chaque stade s'amenuisent pour tendre vers zéro.

Si le mécanisme de « multiplicateur keynésien » a bien lieu tel que décrit précédemment, quel sera l'augmentation totale des dépenses induite par la dépense par l'État de 100 euros ?

Exercice 23. Modèle de la toile d'araignée (Cobweb)

On s'intéresse à la dynamique des prix sur un marché agricole où les décisions de production sont prises avec un décalage d'une période par rapport aux prix observés. Pour $t \in \mathbb{N}$, on note P_t le prix du bien au temps t , Q_t^s la quantité offerte au temps t et Q_t^d la quantité demandée au temps t .

Plus précisément, on suppose que l'on a, pour tout $t \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} Q_t^s = a + bP_{t-1} \\ Q_t^d = c - dP_t \end{cases}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et $d > 0$.

1. Expliquer par des phrases en français la signification des équations du modèle.
2. À l'équilibre du marché, montrer que, pour tout $t \in \mathbb{N}^*$,

$$P_t = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}P_{t-1}.$$

3. Exprimer P_t en fonction de t .
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients du modèle pour que le prix P_t converge (lorsque t tend vers $+\infty$).

Exercice 24. Modèle multiplicateur-accélérateur de Samuelson

On suppose une économie fermée, où à chaque période $t \in \mathbb{N}$, on note Y_t le revenu national, g_t les dépenses publiques, C_t les dépenses de consommation et I_t l'investissement induit. Les équations du modèle de Samuelson s'écrivent alors :

$$\begin{cases} Y_t = g_t + C_t + I_t \\ C_t = \alpha Y_{t-1} \\ I_t = \beta (C_t - C_{t-1}) \\ g_t = 1 \end{cases}$$

1. Expliquer par des phrases en français la signification des équations du modèle.
2. Pour $t \geq 2$, exprimer Y_t en fonction de Y_{t-1} et Y_{t-2} .

Dans la suite, on notera (R) la relation vérifiée par Y_t .

3. Déterminer une suite constante vérifiant la relation (R). On notera C la valeur de cette constante. En posant, $Z_t = Y_t - C$, déterminer une relation vérifiée par (Z_t) . En déduire l'expression de Z_t en fonction de t puis de Y_t en fonction de t .
4. Discuter du comportement de Y_t selon le signe de $\alpha(1 + \beta^2) - 4\beta$.

Chapitre 3

Fonctions bijectives et réciproques

Exercices

Exercice 25. Montrer que chacune des fonctions suivantes est une bijection et déterminer sa réciproque.

$$1. f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{-5x+3}{2} \end{cases}$$

$$2. g: \begin{cases}]-1; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5\ln(x+1) - 3 \end{cases}$$

$$3. h: \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow & [1; +\infty[\\ \mu & \longmapsto & \mu^2 + 1 \end{cases}$$

Exercice 26. Donner plusieurs fonctions qui ne sont pas bijectives et plusieurs fonctions qui sont bijectives. On veillera à bien définir les ensembles de départ et d'arrivée des différentes fonctions.

Exercice 27.

1. Rappeler la définition de la valeur absolue d'un nombre réel puis de la fonction valeur absolue.
2. Étudier le signe et les variations de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$. La fonction valeur absolue est-elle bijective?

3. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto 2x + |x| + 1 \in \mathbb{R}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

4. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}x + |x| + 1 \in \mathbb{R}$ n'est pas bijective.

5. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto ax + |x| + 1$ est-elle bijective? Déterminer sa réciproque le cas échéant.

Exercice 28. Le coût de production c d'une entreprise dépend de la quantité produite q . Plus précisément, on a

$$c = C(q) = 2q^2 + 5q + 100.$$

1. La fonction $C: \mathbb{R} \longrightarrow C(\mathbb{R})$ est-elle bijective?
2. Si l'on se restreint à l'intervalle $I = [0; +\infty[$, montrer que la fonction $C: [0; +\infty[\longrightarrow [100; +\infty[$ est alors bijective et déterminer l'expression de sa fonction réciproque.

Chapitre 4

Continuité

Exercices

Exercice 29. Pour chacune des fonctions suivantes, donnez l'ensemble de définition et trouvez les limites aux bornes.

1. $f_1 : x \mapsto -2x^4 - 4x^3 + 2x - 1$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 1}{4x^2 - 1}$
3. $f_3 : x \mapsto \frac{2x^2 - x - 5}{x - 1}$
4. $f_4 : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{x}}{4\sqrt{x} + 1}$
5. $f_5 : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2 - x + 5}$

Exercice 30.

Soit la fonction $f : x \in]0; +\infty[\mapsto x + \ln(x)$. Montrer que f est bijective de $]0; +\infty[$ dans $f(]0; +\infty[)$ puis déterminer $f(]0; +\infty[)$.

Exercice 31.

Soit la fonction $f : \mu \in \mathbb{R} \mapsto e^\mu - e^{-\mu}$. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ puis déterminer $f(\mathbb{R})$.

Exercice 32.

Soit la fonction $f : v \in]-1; +\infty[\mapsto \frac{e^v}{v+1} \in \mathbb{R}$. La fonction f est-elle bijective?

Exercice 33.

Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x + |x|$. La fonction f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$?

Exercice 34.

Soit la fonction $f : \zeta \in \mathbb{R} \mapsto \zeta^2 - \cos(\zeta) \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle puis déterminer cet ensemble.
2. La fonction f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$?
3. Déterminer un intervalle I sur lequel f est bijective de I dans $f(I)$.

Exercice 35. Soit $D(p) = \frac{100}{p+1}$ la demande d'un bien en fonction de son prix $p \geq 0$, et $O(p) = p^2 + 10$ l'offre.

1. Montrer que la fonction g définie par $g(p) = D(p) - O(p)$ est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que g est une bijection de $[0; +\infty[$ dans $g([0; +\infty[)$ puis déterminer $g([0; +\infty[)$.
3. Justifier qu'il existe un unique prix d'équilibre $p^* \geq 0$ tel que $D(p^*) = O(p^*)$.
4. Est-il simple de déterminer la valeur exacte de p^* ?

Exercice 36. Une entreprise produit un bien dont le coût total de production est donné par

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 100 \quad \text{pour } q \in [0; 10]$$

où q est la quantité produite. Le prix de vente unitaire est $p(q) = 150 - 3q$.

1. Justifier sans calcul que la fonction de profit $\pi : q \in [0; 10] \mapsto qp(q) - C(q)$ admet un maximum sur $[0; 10]$.
2. Calculer ensuite la quantité q^* qui maximise le profit ainsi que le profit maximal.
3. Répondre aux mêmes questions pour le minimum.

Exercice 37.

1. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$$

2. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

Indication : on pourra commencer par factoriser les polynômes apparaissant aux numérateurs et aux dénominateurs en remarquant qu'ils admettent une racine évidente puis en effectuant une division euclidienne.

Chapitre 5

Dérivabilité

Exercices

Exercice 38. La fonction $C : q \in]0; +\infty[\mapsto C(q)$ modélise le coût total de production exprimé en milliers d'euros d'une quantité d'articles q exprimée en milliers d'articles. On suppose que C est dérivable sur $]0; +\infty[$.

1. On note $CM(q)$ le coût moyen de production en euros par article produit. Rappeler l'expression de $CM(q)$.
2. Quelle est la définition mathématique du coût marginal de production? Comment peut-on l'interpréter?

Exercice 39. Étudier les variations des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 3x + 2$
2. $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - \frac{x}{2}$
3. $f_3 : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \frac{x+7}{x-1}$
4. $f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 3x^2 - 5x + 1$
5. $f_5 : x \in [0; +\infty[\mapsto (1 + 2x)^{\frac{1}{3}}$

Exercice 40. (Élasticité et opérations)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit λ un réel.

Montrer que, pour tout $x \in I$:

1. $\varepsilon_{\lambda f}(x) = \varepsilon_f(x)$
2. $\varepsilon_{fg}(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)$
3. $\varepsilon_{\frac{1}{f}}(x) = -\varepsilon_f(x)$

Application : Soit $f : \varepsilon \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\varepsilon}{\exp(\varepsilon)} \in \mathbb{R}$.
Calculer l'élasticité de f au point x .

Exercice 41. (Tiré du bac ES, juin 2008, Liban)

On suppose que la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x + 8)e^{-0,5x}$$

modélise la demande d'un produit informatique. Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines d'euros.

1. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, calculer l'élasticité de f au point x et étudier son signe. Interpréter par une phrase en français.
2. Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à $-3,5$.
3. Comment évolue la demande lorsque le prix passe de 800 à 804 euros?

Exercice 42. Le coût total de production est $C(q) = e^{0,1q}$.

1. Déterminer l'expression du coût marginal $C'(q)$.
2. En faisant un développement de Taylor à l'ordre 1 de C' en $q = 10$, et en utilisant le fait que $e \approx 2,718$, calculer une valeur approchée de $C'(10, 1)$.

Exercice 43. Le profit d'une entreprise en fonction de la quantité produite q est donné par :

$$\pi(q) = \ln(1 + q) + \frac{1}{1 + q}, \quad \text{pour } q \in [0; 1].$$

1. Déterminer un développement de Taylor de $\pi(q)$ à l'ordre 2 autour de $q = 0$.
2. Avec la calculatrice, en déduire une approximation de $\pi(0, 1)$ et comparer avec la valeur exacte de $\pi(0, 1)$.
3. Reprendre les mêmes questions en faisant un développement à l'ordre 3. Comparer ensuite les valeurs approchées de $\pi(0, 1)$ obtenues.

Exercice 44. Avec un développement de Taylor, calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1}{xe^x}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x) - x}{x^2}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/3} - 1 - \ln(x)}{(x-1)^2}$;
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1+x}{x} \right)$;
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - 1 + x}{(x-1)^2}$.

Exercice 45. Soit

$$f : x \in]1; +\infty[\mapsto \frac{x^3 - 3x^2 - x + 2}{x - 1}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer quatre nombres réels a, b, c et d tels que, pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-1}.$$

2. Avec un développement de Taylor, trouver l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en 0 et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ qu'il y a de 0.
3. Avec un développement de Taylor, montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2. On pourra commencer par rappeler une condition suffisante pour qu'une fonction admette un point d'inflexion.

Exercice 46. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 5x + 3 \in \mathbb{R}$ est bijective. Déterminer sa fonction réciproque puis vérifier la formule donnant la dérivée de la fonction réciproque.

Exercice 47. On considère un marché pour lequel les données suivantes sont disponibles.

Prix p (€)	Quantité demandée $D(p)$ en milliers
10	90
20	60
30	50
40	35
50	10

1. Représenter graphiquement la fonction $D : p \mapsto D(p)$ (on reliera les points donnés en construisant une fonction affine par morceaux).
2. Calculer, pour chacun des intervalles considérés, la demande marginale.
3. Calculer $(D^{-1})'(70)$ et interpréter le résultat par une phrase.

Exercice 48. 1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto xe^x$ est bijective de $[-1; +\infty[$ dans $f([-1; +\infty[)$.

2. Déterminer $f([-1; +\infty[)$.
3. f^{-1} est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?
4. Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 49. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ e^{-(x-1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in]1; +\infty[$, il existe un polynôme P_n de degré n tel que

$$f^{(n)}(x) = P_n(x-1)e^{-(x-1)^2}.$$

3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 6

Optimisation et convexité

Exercices

Exercice 50. Pour chacune des fonction ci-dessous, déterminer les extrema locaux éventuels. S'agit-il d'extrema globaux?

1. $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 3x^2$
2. $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^5 - 5x$
3. $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto x \sin(x)$
4. $f_4 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 51. Pour chacune des fonctions ci-dessous, répondre aux questions suivantes : f est-elle convexe sur son ensemble de définition? concave? quasi-convexe? quasi-concave?

1. $f_1 : \delta \in \mathbb{R} \mapsto \delta^2$
2. $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$
3. $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$
4. $f_4 : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(x)$
5. $f_5 : \epsilon \in \mathbb{R} \mapsto -\epsilon^4 + 2\epsilon^2$

Exercice 52. Le coût de production $C(q)$ d'une entreprise dépend de la quantité produite q . Plus précisément, on a

$$C(q) = q^2 + 3q.$$

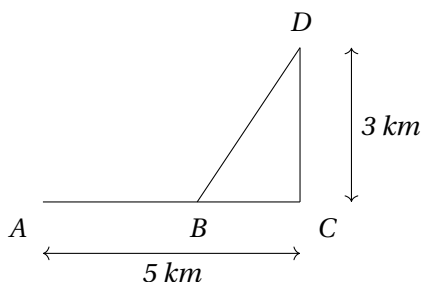
On suppose de plus que l'entreprise est en situation de monopole, donc que le prix de vente dépend de q . On suppose plus exactement que $p(q) = 100 - q$. Au final, le profit est donné par

$$\pi(q) = qp(q) - C(q).$$

Déterminer la quantité q^* qui maximise le profit de l'entreprise.

Exercice 53. Un industriel souhaite fabriquer une casserole de 2 Litres. Quelles doivent être les dimensions de la casserole afin que la quantité de métal utilisée soit minimale? (On assimilera la casserole à un cylindre sans couvercle)

Exercice 54. On souhaite construire une autoroute entre deux villes A et B. La partie [AC] existe déjà, mais doit subir une rénovation entre A et B qui coûte 2 millions d'euros par kilomètre pour être utilisable. Le tronçon [BD] est à construire neuf et coûte 4 millions d'euros par km. Où doit-on placer le point B sur le segment [AC] afin que le coût de construction de l'autoroute soit minimal.



Exercice 55. Montrer que lorsque le coût moyen est minimal, le coût moyen est égal au coût marginal.

Exercice 56. On note p le prix d'un bien, $q(p)$ la quantité demandée correspondant au prix p et $R(p)$ le revenu défini par $R(p) = pq(p)$. On suppose que q est une fonction dérivable sur $[0; +\infty[$ et que pour tout $p \geq 0$, $q(p) > 0$.

1. Justifier que R admet un maximum sur $[0; +\infty[$. Si on note p_0 le prix tel que R admet un maximum en p_0 , justifier de plus que $p_0 > 0$.
2. Déterminer l'élasticité de R en p_0 . Interpréter.

Exercice 57. Soient $a, b > 0$. On considère une fonction d'utilité U définie sur $[0; +\infty[$ par

$$U(q) = aq - \frac{b}{2}q^2.$$

1. Étudier les variations de U .
2. Montrer que U est concave.
3. Interpréter économiquement les résultats des deux questions précédentes.

Exercice 58. Une entreprise a une fonction de coût total :

$$C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 100;$$

où q est la quantité produite.

1. Déterminer deux intervalles I et J tels que :

$$\begin{cases} I \cup J = [0; +\infty[\\ C \text{ est concave sur } I \\ C \text{ est convexe sur } J \end{cases}$$

2. Interpréter économiquement.

Exercice 59. Une entreprise a une fonction de coût définie par

$$C(q) = \begin{cases} q^2 & \text{si } 0 \leq q \leq 10 \\ 20q - 10 & \text{si } q \geq 10 \end{cases}$$

où q désigne la quantité produite.

1. C est-elle convexe sur $\mathbb{R}^+$?
2. Montrer que C est quasi-convexe sur $\mathbb{R}^+$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 60. Montrer que si f est concave, alors f est quasi-concave.

Exercice 61. Montrer que si f est quasi-convexe, alors tout minimum local de f est un minimum global.

Chapitre 7

Calcul intégral

Exercices

Exercice 62. Pour chaque fonction, déterminer les primitives sur l'intervalle indiqué :

1. $f(x) = 6x - 5$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = 2e^{-3x} + 4$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = \frac{3}{2x+1}$ sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$.
4. $k(x) = \sin(2x) + \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 63. Pour chaque fonction, déterminer les primitives sur l'intervalle indiqué :

1. $f(\alpha) = (2\alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha + 3)$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(\beta) = \frac{e^\beta}{e^\beta + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(\gamma) = \frac{\gamma^2}{\gamma^3 + 5}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $k(\delta) = \delta\sqrt{\delta} + \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 64. Pour chaque fonction, déterminer les primitives sur l'intervalle indiqué :

1. $f(x) = (x^2 + 1)^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = 7e^{2x-3}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 65. Soit f une fonction de la forme $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ telle que $f(0) = 2$ et telle que $f'(0) = 1$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les valeurs de a et b .

2. Déterminer une primitive F de f de la forme $F(x) = (cx + d)e^{-x}$.

3. Calculer, en unités d'aire, la valeur de l'aire de la partie délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 4$.

Exercice 66. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 2x^2 - 5$
2. $f_2 : x \in]1; +\infty[\mapsto \frac{2}{x^2}$
3. $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x^2(x^3 - 1)^2$
4. $f_4 : x \in [4; +\infty[\mapsto \frac{x}{(x^2 - 3)^3}$
5. $f_5 : x \in [0; +\infty[\mapsto \sqrt{x}$

Exercice 67.

1. Soit $n \in \mathbb{Q}$. Déterminer les primitives de la fonction

$$x \mapsto x^5(1+x^6)^n.$$

2. En déduire :

(a) $I_1(x) = \int x^5(1+x^6)^5 dx$

(b) $I_2(x) = \int \frac{x^5}{(1+x^6)^5} dx$

(c) $I_3(x) = \int x^5 \sqrt{(1+x^6)^3} dx$

(d) $I_4(x) = \int \frac{x^5}{1+x^6} dx$

Exercice 68. On considère les fonctions de demande et d'offre suivantes :

- Demande : $P = 100 - 0,3Q_d$
- Offre : $P = 10 + 0,2Q_s$

où P désigne le prix et Q_d et Q_s les quantités respectivement demandée et offerte.

1. Déterminer la valeur du prix P^* pour lequel l'offre est égale à la demande.
2. Tracer les courbes de demande et d'offre.
3. Le surplus du consommateur est égal à l'aire de la région située sous la courbe de demande et au dessus du prix d'équilibre.

- (a) Représenter le surplus du consommateur sur le graphe précédent.
- (b) À l'aide d'une intégrale, exprimer le surplus du consommateur.
- (c) Calculer cette intégrale.

Exercice 69. Dans un pays, on note $L(x)$ la proportion de richesses détenue par les 100x% les plus pauvres (avec $x \in [0; 1]$). On appelle **courbe de Lorenz** la courbe de la fonction L . De plus, on appelle coefficient de Gini le réel suivant :

$$\text{Gini} = \frac{1}{2} \int_0^1 x - L(x) dx.$$

1. Justifier que pour tout $x \in [0; 1]$, $L(x) \leq x$.
2. Justifier également que la fonction L est convexe.
3. Tracer la courbe de la fonction L sur $[0; 1]$. A quelle aire correspond le coefficient de Gini?
4. Montrer que

$$\text{Gini} = 1 - 2 \int_0^1 L(x) dx.$$

5. En pratique, l'expression de $L(x)$ n'est pas connue mais on peut imaginer connaître l'ensemble des salaires $(x_k)_{1 \leq k \leq N}$ des N habitants du pays. On supposera que les x_k sont par ailleurs rangés par ordre croissant. La fonction

L est ainsi une fonction affine par morceaux telle que, pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$,

$$L\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{\sum_{i=1}^N x_i}$$

Dans la suite, pour alléger les notations, on pose $L_k = L\left(\frac{k}{N}\right)$ et $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$.

- (a) Donner l'expression de $L(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{k}{N}; \frac{k+1}{N}\right]$ (pour $k \in \{1, \dots, N-1\}$).
- (b) Montrer que

$$\int_0^1 L(x) dx = \frac{1}{2N^2 \bar{x}} \sum_{i=1}^{N-1} (2N-2i+1) x_i$$

- (c) En déduire que le coefficient de Gini est

$$\text{Gini} = \frac{2}{N^2 \bar{x}} \left(\sum_{i=1}^{N-1} i x_i \right) - \frac{N+1}{N}.$$

6. On trouve parfois la définition suivante pour le coefficient de Gini :

$$\text{Gini} = \frac{1}{2N^2 \bar{x}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |x_i - x_j|.$$

Montrer que cette définition permet de retrouver la même expression que celle obtenue à la question précédente.

Exercice 70. A l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_0^+; +\infty$.

Exercice 71. A l'aide d'une intégration par parties, calculer les primitives suivantes :

$$\int_0^2 x e^x dx, \quad \int_0^1 x^2 e^x dx \quad \text{et} \quad \int_0^e x^2 \ln x dx$$

Exercice 72. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [1, 2]$, on a :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2. Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$.
3. Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$ (on fera une intégration par partie).

Exercice 73. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$.

Exercice 74. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx.$$

1. Pour $n \geq 0$ et $m \geq 1$, déterminer une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$.
2. Pour $n \geq 0$, calculer $I_{0,p}$.
3. En déduire une expression de $I_{m,n}$ en fonction de m et de n .

Exercice 75.

1. Calculer $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$ en posant $x = \sqrt{t}$
2. Calculer $\int_1^e \frac{1}{2t \ln(t) + t} dt$ en posant $x = \ln(t)$

Exercice 76. Calculer $\int x\sqrt{1+x^2} dx$ en posant $u = 1+x^2$.

Exercice 77. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$.
En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(3x-1)^2}{2}} dx$.

Exercice 78. Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-2}$.

Exercice 79. Calculer $\int_1^2 \frac{x}{x+1} dx$.

Exercice 80. Calculer $\int \frac{x}{x^2-x-1} dx$.

Exercice 81. Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ en posant $u = \sqrt{1+x}$.
2. $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ en posant $u = e^x$.