

Mathématiques pour économistes 1

Licence 1

2026/2027 : Semestre 1

Yannick VINCENT

Faculté d'économie de Montpellier

www.yannickvincent.fr

Table des matières

Vocabulaire mathématique	5
1 Logique et raisonnement	8
I Premiers éléments de logique	8
I.1 « Négation », « et », « ou »	8
I.2 L'implication logique	8
II Propositions et quantificateurs	11
II.1 Quantificateurs	11
II.2 Négation	11
II.3 Commutativité des quantificateurs identiques	12
II.4 Non-commutativité des quantificateurs différents	12
III Techniques de raisonnements	12
III.1 Raisonnement par équivalences successives	12
III.2 Raisonnement par disjonction de cas	13
III.3 Raisonnement par contraposée	14
III.4 Raisonnement par l'absurde	14
III.5 Raisonnement par récurrence	14
III.6 Raisonnement par analyse-synthèse	15
IV Ensembles	16
IV.1 Quelques exemples d'ensembles	16
IV.2 Généralités sur les ensembles	16
IV.3 Produit cartésien d'ensembles	18
2 Suites numériques	19
I Généralités	19
II Suites arithmétiques	25
III Suites géométriques	25
IV Suites arithmético-géométriques	26
V Suites récurrentes d'ordre deux	28

Introduction

Quelques conseils pour progresser

Si chacun a ses propres habitudes en ce qui concerne les apprentissages, il existe néanmoins des méthodes plus efficaces que d'autres. Les éléments ci-dessous constituent une liste non-exhaustive de conseils qui peuvent être utiles et que chacun pourra s'approprier à sa façon.

En Cours et en TDs

- **Être attentif** est une condition indispensable pour comprendre. Cela signifie notamment le fait de toujours écouter les explications données par le professeur. Cela inclut y compris le fait de ne pas demander des explications à son voisin sur une notion que le professeur est justement en train d'expliquer. Il y a des temps prévus pour le travail en groupe (parfois en TD par exemple) et d'autres où il est nécessaire d'écouter. Ne pas respecter ces différents moments apportera de la confusion et ne vous permettra pas de progresser.

- **L'écoute en cours doit être active.** Lorsque l'on écoute un cours, il faut toujours se poser les questions suivantes :

1. Est-ce que j'ai compris exactement ce que dit le professeur?
2. Est-ce que je sais identifier précisément quelle proposition ou quelle définition on utilise dans le raisonnement?
3. Est-ce que je comprend globalement pourquoi on est en train de faire ce que l'on fait? (à quoi cela sert)

Cette dernière question étant d'ordre plus général, il est parfois nécessaire de la mettre provisoirement de côté afin de se concentrer dans un premier temps sur les aspects plus techniques. Cependant, il est toujours important d'y revenir par la suite car c'est cela qui vous permettra de vous approprier pleinement les notions et de leur donner un sens.

- **Poser des questions.** Le fait de poser des questions lorsque l'on ne comprend pas (en demandant simplement au professeur de réexpliquer) est ce qui permettra au professeur de se mettre à votre niveau et d'adapter au mieux son cours. Cela rendra les choses plus faciles pour tout le monde et vous permettra de mieux comprendre la suite. S'il n'est pas toujours possible de poser une question en amphithéâtre, les Travaux Dirigés sont en revanche un lieu privilégié pour le faire.

- **Noter les passages pas clairs** (en faisant une petite croix dans la marge par exemple) est une astuce à retenir pour pouvoir revenir dessus après le cours. Dans le cas où vous êtes un peu perdu, il est inutile de paniquer mais il faut faire l'effort de s'accrocher. Il y a en fait pleins d'occasions de reprendre le fil : lorsque l'on termine une démonstration compliquée et que l'on passe à un autre théorème par exemple.
- **Lors des Travaux Dirigés**, il est nécessaire de ne pas attendre la correction mais de chercher activement les exercices. C'est notamment un moment privilégié pour revenir sur une méthode classique vue en cours afin de l'assimiler. Lorsque l'on ne sait pas faire un exercice, une erreur classique est de se tourner tout de suite vers un camarade pour demander des explications. Si la collaboration est quelque chose d'important, il est néanmoins tout aussi important de commencer à chercher un exercice seul. Ce n'est qu'après avoir bien cerné et identifié vos propres difficultés face à cet exercice que vous pourrez poser une questions plus précise à un camarade. Là aussi, il s'agit finalement de toujours être actif face aux apprentissages.
- Le point précédent ne doit pas masquer toute **l'importance de s'entraider entre camarades**. L'entraide est d'ailleurs tout aussi importante pour celui qui se fait aider que pour celui qui aide. Expliquer quelque chose permet en effet de s'assurer que l'on a bien compris soi-même. La collaboration entre étudiants est donc tout à fait importante. Il y a simplement un moment pour le faire.

À la maison

- **Travailler régulièrement** en revoyant systématiquement son cours avant le cours suivant et en faisant des exercices est indispensable. Travailler avec des camarades en allant par exemple à la Bibliothèque peut d'ailleurs être un bon moyen de se motiver.
- **Revoir le cours** ne signifie pas simplement le lire. Cela se fait nécessairement un crayon à la main pour refaire les exemples. Il faut par ailleurs connaître les définitions et les propositions de manière précise, sans oublier aucune hypothèse, et savoir les réciter. Cela ne doit pas être approximatif car c'est en connaissant bien le contenu de votre cours que vous pourrez résoudre des exercices sans vous tromper.
- **Faire et refaire des exercices**. Étant donné que les évaluations consistent majoritairement à résoudre des exercices, il est clair qu'il est important de s'entraîner à cela. Là aussi, il ne faut pas se contenter de relire les exercices vus en classe mais s'assurer que l'on est capable de les refaire, crayon en main. Tant que l'on est pas capable de refaire l'exercice sans aide du corrigé, il faut considérer que les notions ne sont pas complètement acquises et qu'il faudra donc refaire les exercices en questions le lendemain ou quelques jours plus tard. À noter que des exercices supplémentaires ainsi que des capsules vidéos sur le contenu du cours sont disponibles en ligne sur la page du cours.
- Il est important de savoir **trouver un équilibre entre l'apprentissage du cours et la résolution d'exercices**. Parfois, certains étudiants pensent que le fait de connaître précisément le cours est inutile car ce n'est pas ce qui sera directement évalué. C'est une erreur car c'est justement la connaissance du cours qui vous permettra de savoir si vous avez le droit d'utiliser un théorème ou non, et vous évitera de tomber dans les pièges classiques. A contrario, apprendre son cours sans faire d'exercices n'est pas une stratégie efficace. Il faut donc apprendre à gérer son planning de révisions afin de travailler à la fois le cours et les exercices.

- **Faire des fiches synthèses** peut également être une bonne idée tant pour mémoriser le cours que les méthodes vues en TD.

Lettres grecques

En mathématiques, il est d'usage de nommer de manière semblable des objets de même nature. Par exemple, si un exercice utilise trois nombres réels, on les notera souvent x , y et z . Si l'on introduit des fonctions, on les notera f , g et h . Pour des points géométriques, on utilisera plutôt les lettres A, B et C, *etc.* Cela facilite la compréhension mais nécessite bien souvent d'utiliser beaucoup de symboles. C'est pourquoi les mathématiques utilisent très régulièrement les lettres grecques et qu'il faut les **connaître absolument**.

Nom	Minuscule	Majuscule
Alpha	α	A
Bêta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ	E
Zêta	ζ	Z
Êta	η	H
Thêta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	M
Nu	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omicron	$\omicron$	O
Pi	π	Π
Rhô	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Upsilon	υ	Υ
Phi	ϕ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Oméga	ω	Ω

Vocabulaire mathématique

Les points « Étymologie » sont extraits de *Les mots et les maths, dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique*, Bertrand Hauchecorne, 2014, ellipses.

Mathématiques

Étymologie : Le mot *mathématique* nous vient du grec *mathema* ou plutôt de son pluriel *mathe-mata*. ce mot désignait aussi bien le fait d'apprendre que son résultat : la connaissance, la science. Sous l'influence de Platon et d'Aristote pour qui les mathématiques sont un avoir fondamental, le

mot se spécialise dans ce que nous appelons les mathématiques, au sens le plus large.

L'usage du pluriel *mathématiques* est un héritage de l'époque antique et médiévale où le *quadrivium* regroupait les quatre *ars mathematica* : l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie et la musique.

Plus tard, au XVIII^e siècle, on parle des mathématiques sans doute avec l'idée que cette matière englobe des disciplines devenues différentes comme la géométrie, l'algèbre ou même des branches classeront de nos jours en physique. L'utilisation du pluriel semblait en tout cas tout à fait correspondre avec cette pluralité.

Au XX^e siècle, à la suite de Bourbaki (Jean Dieudonné en particulier), certains mathématicien-ne-s privilégient l'utilisation du singulier *mathématique* afin d'insister sur l'unité qui existe entre les différentes parties des mathématiques.

Définition

Une définition est acceptée sans démonstration puisqu'elle donne simplement la signification d'un terme à l'aide de concepts déjà définis antérieurement. La nouvelle notion doit toutefois être définie sans ambiguïté, ce qui explique que l'on puisse trouver des éléments de preuve sous une définition mathématique. Pour ainsi dire, c'est comme si la définition pouvait se diviser en deux parties : une première partie énonçant une proposition (assurant une existence ou une unicité par exemple) et une seconde partie constituant la définition à proprement parler.

Étymologie : Les mathématiques utilisent de nos jours des concepts définis avec soin afin d'établir des théorèmes précis. Il faut cependant attendre le XVI^e siècle, avec le souci de rigueur insufflé à la Renaissance, pour que ce besoin se fasse sentir. Le mot *définition* est un calque du latin *definitio*. Ce dernier désigne une indication précise. On y sent encore l'idée étymologique de marquer une limite. *Définition* n'est d'abord utilisé que pour donner le sens d'un mot. Il faut attendre le XVI^e siècle pour que son sens s'étende à la définition d'un concept.

Proposition

En logique, il s'agit d'une phrase qui ne peut être que vraie ou fausse (principe du tiers exclu).

En mathématiques, il s'agit d'un énoncé qui est vrai. Dans un cours de mathématiques, une proposition est toujours démontrée. Énoncée sous une forme « Si A alors B », on dit que A constitue les hypothèses et que B est la conclusion de la proposition.

Étymologie : Proposer, c'est *poser en avant*. Déjà dans l'Antiquité, *propositio* s'utilise en logique. Repris au XIII^e siècle en français, *proposition* désigne un énoncé soumis au consentement des autres.

Théorème

En mathématiques, il est d'usage de réserver le terme *théorème* aux propositions considérées comme particulièrement intéressantes ou importantes. D'un point de vue purement logique, rien ne distingue *théorème* et *proposition*. La différence est plutôt d'ordre subjectif.

Étymologie : Le mot *théorème* est construit sur deux racines grecques. la première *thea* désigne le spectacle, on la reconnaît dans *théâtre* et *théorie*. La seconde signifie *observer* ou *contempler*. On la retrouve elle aussi dans *théorie* mais aussi dans *panorama*. *Theorema* désignait à la fois la fête, la méditation et l'objet d'étude. Au début, la pensée mathématique grecque était basée sur l'observation. La rupture fondamentale de ce peuple est de s'être ensuite soucié de justifier un résultat plutôt que de se contenter de l'établir. Le sens du mot *theorema* évolue parallèlement. À l'époque tardive puis chez les Romains il signifie *proposition démontrable*. Bien sûr, la notion de preuve n'était pas celle que nous connaissons de nos jours. Cependant, on peut dire que le mot avait déjà pris le sens actuel. À la Renaissance le souci de démonstration réapparaît en mathématiques. Le mot *théorème* est repris et francisé en 1539.

Axiome

En mathématiques, le mot axiome désignait une proposition qui est évidente en soi dans la tradition mathématique des *Éléments* d'Euclide. L'axiome est utilisé désormais, en mathématique, pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. De ce fait, un axiome est accepté sans démonstration. L'ensemble des axiomes d'une théorie doit être non contradictoire.

Étymologie : Dans son sens premier *axiōma* désignait pour les Grecs *prix, valeur* puis par extension ce qui paraît juste, convenable. L'adjectif *axiōmatikos* désignait ce qui a un air de dignité ou d'autorité. Le mot est repris en latin puis en français à la Renaissance, époque à laquelle il est utilisé en chirurgie. Il faut attendre le siècle suivant pour voir les mathématiciens puis les philosophes l'employer. Le développement de la logique mathématique donne ensuite une place importante à l'adjectif *axiomatique*.

Postulat

Étymologie : Ce mot est introduit au XVIII^e siècle par des mathématiciens travaillant sur Euclide et son cinquième postulat. Il est forgé sur le verbe latin *postulare, demander, souhaiter*. Il désignait une proposition, non nécessairement évidente, que l'on supposait sans pouvoir la démontrer. Il se différenciait à l'époque d'un axiome, vérité évidente en soi mais qu'on ne pouvait démontrer. De nos jours, cette différence n'a plus de sens. Une théorie est basée sur des axiomes : ils sont le principe de base. Leur évidence est fonction de ce qu'elle est censée représenter et n'est plus du domaine de la théorie elle-même.

Lemme

C'est une proposition technique, parfois difficile, mais qui n'a pas d'autre application que de permettre la démonstration d'un théorème. Il arrive qu'avec le temps, ce qui semblait un résultat intermédiaire apparaisse comme une proposition fondamentale et devienne un théorème. Parfois, pour des raisons historiques, le nom de *lemme* lui reste accolé. C'est par exemple le cas du lemme de Gauss en arithmétique.

Étymologie : Dans l'Antiquité, *lemme* était un terme de logique. Il désignait la majeure du syllogisme, c'est-à-dire la première assertion. Ainsi, dans la dialectique grecque, le lemme, le problème et l'épiphore sont les trois parties de l'argument. Par extension, le mot désigne ensuite en mathématiques l'un des arguments de la preuve sans en être le fondement.

Corollaire

C'est une proposition qui découle clairement (donc sans démonstration ou presque) d'un théorème établi.

Étymologie : Du latin *corolla* qui signifie petite couronne. *Corollaire* désigne quelque chose d'aucune valeur, de gratuit. Il apparaît puis se spécialise dans son sens mathématique au XVII^e siècle.

Conjecture

Il s'agit d'une proposition non démontrée et que les mathématicien-ne-s cherchent à démontrer. Poser une conjecture est un processus fondamental dans la recherche en mathématiques. Les conjectures les plus célèbres qui ont été démontrées récemment sont, sans doute, le grand théorème de Fermat et la conjecture de Poincaré.

Étymologie : du latin *conjectura*, dérivé de *cum* et *jacio* (littéralement jeté avec).

Chapitre 1

Logique et raisonnement

I Premiers éléments de logique

I.1 « Négation », « et », « ou »

Remarque. En logique classique, une phrase ne peut être que vraie ou fausse (c'est le principe du tiers exclu).

Définition 1.1

La **négation** de la proposition A, notée $\text{non}(A)$, est la proposition qui est fausse quand A est vraie et vraie quand A est fausse.

Remarque. $\text{non}(\text{non}(A))=A$.

Définition 1.2

- On dit que la proposition « A et B » est vraie lorsque A et B sont toutes les deux vraies. Elle est fausse sinon.
- On dit que la proposition « A ou B » est vraie si au moins l'une des deux assertions est vraie. Elle est fausse si A et B sont toutes les deux fausses.

Proposition 1.3

- La négation de « P et Q » est « $\text{non}(P)$ ou $\text{non}(Q)$ ».
- La négation de « P ou Q » est « $\text{non}(P)$ et $\text{non}(Q)$ ».

Exemple 1. La négation de « cette personne est majeure et vaccinée » est « cette personne n'est pas majeure ou elle n'est pas vaccinée ».

Exemple 2. La négation de « cette personne est majeure ou vaccinée » est « cette personne n'est ni majeure, ni vaccinée ».

I.2 L'implication logique

Définition 1.4 – Implication

L'implication « $A \implies B$ » est vraie lorsque A est fausse ou lorsque A est vraie et B est vraie.

Remarque.

- Autrement dit, l'implication « $A \implies B$ » est vraie signifie :
 - soit que A est fausse (auquel cas, il n'y a rien à vérifier pour que l'implication soit vraie);
 - soit que A est vraie et on a alors nécessairement B vraie également.
- En pratique, on pensera l'implication « $A \implies B$ » comme étant « Si A est vraie, alors B est vraie ».
- Affirmer que l'implication « $A \implies B$ » est vraie ne signifie pas que A et B soient vraies. Cela signifie simplement que, ou bien A et B sont simultanément vraies, ou bien A est fausse (et on ne sait alors rien dire de B).
- En mathématiques, lorsqu'on énonce une proposition sous la forme $A \implies B$, on dit que A correspond aux hypothèses et B à la conclusion. On dit aussi que A est une condition suffisante à B et que B est une condition nécessaire à A .

Exemple 3. On considère l'implication « Si une personne est en licence, alors elle a eu son baccalauréat ».

On considère que cette phrase est vraie. Cela ne signifie pas que, lorsqu'on croise une personne qui a eu son baccalauréat, elle soit forcément en licence. En revanche, cela signifie que :

- soit elle est en licence, et on peut être sûr qu'elle a eu son baccalauréat.
On dit que « être en licence » est une condition suffisante à « avoir son baccalauréat ».
- soit elle n'est pas en licence, et on ne peut pas savoir si elle a eu son baccalauréat.
On dit que « avoir son baccalauréat » est une condition nécessaire à « être en licence ».

Attention, on voit ici que l'idée selon laquelle « il suffit d'avoir son baccalauréat pour aller en licence » peut être source de confusion.

Exemple 4. On considère l'implication « S'il pleut, alors le sol est mouillé ».

On considère que cette phrase est vraie. On peut faire le même genre de remarque que dans l'exemple précédent.

À noter que l'implication « Si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas » est obligatoirement vraie également.

Ce n'est pas le cas de la réciproque : « Si le sol est mouillé, alors il pleut ». Le sol peut en effet être mouillé pour une autre raison (quelqu'un a versé de l'eau par exemple).

Exemple 5. Dans la proposition : « Si $ABCD$ est un carré, alors $AB = BC = CD = AD$ », la proposition « $ABCD$ est un carré » est une condition suffisante à « $AB = BC = CD = AD$ ». En revanche, la proposition « $AB = BC = CD = AD$ » est une condition nécessaire à « $ABCD$ est un carré ».

Exemple 6. On considère un réel x . La proposition « Si $2x = 4$, alors $x = 3$ ou $x = 4$ » est vraie. On remarquera que pour résoudre l'équation $2x = 4$, raisonner par implication n'est pas suffisant. Pour dire que l'ensemble des solutions de $2x = 6$ est $S = \{3\}$, il faut en fait établir une équivalence, c'est-à-dire deux implications :

- Si $2x = 6$, alors $x = 3$
- Si $x = 3$, alors $2x = 6$.

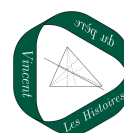
Cela se note « $2x = 6 \iff x = 3$ ».

Proposition 1.5

La **négation** de l'implication « $A \implies B$ » est « A et non(B) ».

Remarque.

- Cela signifie que pour montrer qu'une implication est fausse, il faut trouver un cas dans lequel A est vraie et (mais) B est fausse. Par exemple « $x > 0 \implies x > 1$ » est fausse car on peut trouver un nombre réel x tel que $x > 0$ est vraie et tel que $x > 1$ est fausse. Il suffit par exemple de prendre $x = \frac{1}{2}$.



- On notera bien que la négation d'une implication n'est pas une implication.

Exemple 7. *Solution :*

La négation de « s'il pleut, alors le sol est mouillé » est « il pleut et le sol n'est pas mouillé ».

Définition 1.6

- La **réciproque** de l'implication « $A \Rightarrow B$ » est « $B \Rightarrow A$ ».
- On dit que A et B sont équivalentes, et on note $A \Leftrightarrow B$, si « $A \Rightarrow B$ » et « $B \Rightarrow A$ ».

Remarque.

- Attention, ce n'est pas parce que $A \Rightarrow B$ est vraie que sa réciproque est vraie. Par exemple, la proposition « Si $x \geq 1$, alors $x \geq 0$ » est vraie mais sa réciproque est fausse.
- Lorsque $A \Leftrightarrow B$, on dit que « A est vraie, si et seulement si, B est vraie ».

Exemple 8. On considère la proposition (P) : « s'il pleut, alors le sol est mouillé ».

1. Écrire la réciproque de la proposition P
2. Si P est vraie, sa réciproque est-elle vraie ?

Solution :

La réciproque est : « Si le sol est mouillé, alors il pleut ».

Si P est vraie, sa réciproque (« Si le sol est mouillé, alors il pleut ») n'est pas nécessairement vraie. Le sol peut en effet être mouillé pour une autre raison.

Remarque. Lorsqu'on résout une équation, on cherche une équivalence entre le fait de vérifier l'égalité attendue et le fait d'appartenir à l'ensemble des solutions.

Par exemple, dire que l'ensemble des solutions de l'équation $2x = 6$ est $S = \{3\}$ signifie que :

$$2x = 6 \Leftrightarrow x = 3.$$

C'est bien une équivalence qui est exprimée ici.

Pour s'en convaincre, on pourra notamment réfléchir au fait que l'implication suivante est vraie : « Si $2x = 6$, alors $x = 3$ ou $x = 4$ ». Pourtant 4 n'est pas une solution (car la réciproque de cette dernière implication est bien entendu fausse).

Proposition 1.7

L'implication « $A \Rightarrow B$ » est équivalente à « $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ »

Démonstration. Supposons que l'implication « $A \Rightarrow B$ » est vraie.

Supposons que $\text{non}(B)$ est vraie. C'est donc que A est fausse car sinon, d'après l'implication, on en déduirait que B est vraie. On a bien « $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ ».

Réciproquement, supposons que l'implication « $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ » est vraie.

Supposons que A est vraie. C'est donc que B est vraie, car si B était fausse, on pourrait en déduire que $\text{non}(A)$ est vraie, c'est-à-dire que A est fausse. $\square$

Définition 1.8

L'implication « $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ » est appelée la **contraposée** de « $A \Rightarrow B$ ».

Exemple 9. Quelle est la contraposée de « s'il pleut, alors le sol est mouillé » ?

Solution : « Si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas ». Clairement, cette implication est équivalente à l'implication « s'il pleut, alors le sol est mouillé ».

II Propositions et quantificateurs

II.1 Quantificateurs

En logique, il existe deux quantificateurs :

- le quantificateur universel $\forall$ (pour tout).
- le quantificateur existentiel $\exists$ (il existe au moins un)

Les quantificateurs n'ont leur place que dans des formules symboliques et pas au milieu des phrases écrites en français.

De manière générale, lorsqu'on souhaite réutiliser une variable dans la suite de la preuve :

- Pour montrer qu'une proposition est vraie pour tout $x \in A$, on commencera par considérer un élément x en écrivant « Soit $x \in A$ ».
- Pour montrer une existence en définissant une variable que l'on réutilisera dans la suite de la preuve, on a en revanche deux possibilités :
 - « Il existe $x \in \dots$ » : on l'utilise lorsque l'on sait qu'un élément existe sans savoir nécessairement l'exhiber.
Exemple : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0, 10]$...
 - « On pose $x = \dots$ » : on l'utilise afin de définir un élément de manière explicite. À noter que la définition de x peut faire intervenir d'autres variables déjà définies dans la démonstration (des variables parlantes).
Exemple : montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 > 10$.
Solution : On pose $x = 4$. On a $x^2 = 16$ donc $x^2 > 10$.

Remarque. De manière générale, on veillera à ce que toute variable utilisée dans une copie soit bien définie au préalable.

Exemple 10. Montrer la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{Q}^*, \exists y \in \mathbb{Q}$ tel que $xy = 1$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{Q}^*$.

Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{p}{q}$.

De plus, comme $x \neq 0$, on sait que $p \neq 0$.

On pose $y = \frac{q}{p}$ (cela est possible car $p \neq 0$).

Ainsi,

$$xy = \frac{p}{q} \times \frac{q}{p} = 1.$$

II.2 Négation

Proposition 1.9

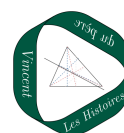
La négation de « $\forall x, P(x)$ est vraie » est « $\exists x$, tel que $P(x)$ est fausse ».

La négation de « $\exists x, P(x)$ est vraie », est « $\forall x, P(x)$ est fausse ».

Exemple 11. Soit A est un ensemble de nombres.

La négation de « $\exists x \in A$ tel que $x > 0$ » est « $\forall x \in A, x \leq 0$ ».

La négation de « $\forall x \in A, x \geq 0$ » est « $\exists x \in A$ tel que $x < 0$ ».



Exemple 12. Soient A et B deux points du plan et soit $\mathcal{D}$ une droite. Écrire la négation de la proposition suivante : Pour tout point $M \in \mathcal{D}$, $AM = BM$.

Solution : Il existe un point $M \in \mathcal{D}$ tel que $AM \neq BM$.

II.3 Commutativité des quantificateurs identiques

La phrase $\forall x, \forall y, \dots$ a la même signification que $\forall y, \forall x, \dots$

La phrase $\exists x, \exists y, \dots$ a la même signification que $\exists y, \exists x, \dots$

II.4 Non-commutativité des quantificateurs différents

Lorsqu'on écrit plusieurs quantificateurs différents à la suite, le sens de la proposition dépend de l'ordre des quantificateurs.

Exemple 13. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*$ tel que $xy = 1$
- $\exists y \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$

Solution :

- Vraie : cela signifie que pour tout réel x non nul, x admet un inverse.
- Faux. Si un tel y existait, on aurait (pour $x = 1$) $y = 1$ et (pour $x = 2$), $y = \frac{1}{2}$. Cela est absurde.

III Techniques de raisonnements

III.1 Raisonnement par équivalences successives

On montre que A est équivalente à B en établissant une suite d'équivalences intermédiaires.

Attention! L'utilisation systématique du symbole $\iff$ est à proscrire. Il pousse souvent à écrire des choses fausses ou inutiles. On l'utilisera en revanche dans le cadre de résolutions d'équations.

Exemple 14. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 3 \end{cases}$$

Solution : Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et soit $x_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 3 \end{cases} \\
& \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1} \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 2(3x_1 - 4x_2) - 3(2x_1 + x_2) = 2 \times 3 - 3 \times 1 \end{cases} \\
& \xLeftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -11x_2 = 3 \end{cases} \\
& \xLeftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 1 - x_2 \\ x_2 = -\frac{3}{11} \end{cases} \\
& \xLeftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = \frac{14}{11} \\ x_2 = -\frac{3}{11} \end{cases} \\
& \xLeftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{11} \\ x_2 = -\frac{3}{11} \end{cases}
\end{aligned}$$

Fin du cours du 10 septembre 2026

III.2 Raisonnement par disjonction de cas

On peut, par exemple, séparer les cas selon la valeur d'une des variables de l'énoncé à démontrer. Il faut néanmoins veiller à bien traiter tous les cas.

Exemple 15. On commence par rappeler la définition suivante.

Définition 1.10 – Valeur absolue

- La **valeur absolue d'un nombre réel** x , notée $|x|$ est le réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- La **fonction valeur absolue** est la fonction suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{cases}$$

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Solution :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas :

- Supposons que $x + y > 0$. Alors $|x + y| = x + y$. Par conséquent, comme $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$, on a :

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

- Supposons que $x + y < 0$. Alors $|x + y| = -(x + y) = -x - y$. Par conséquent, comme $-x \leq |x|$ et $-y \leq |y|$, on a :

$$|x + y| = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Au final, dans tous les cas, on a montré que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

III.3 Raisonnement par contraposée

Pour montrer $A \implies B$, on suppose $\text{non}(B)$ et on montre que $\text{non}(A)$ est vraie.

Exemple 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

Solution :

On va montrer que si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.

Autrement dit, on va montrer que si n est impair, alors n^2 est impair.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier impair.

Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

Ainsi, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

On pose $k' = 2k^2 + 2k$.

On a donc $n^2 = 2k' + 1$, ce qui prouve bien que n^2 est impair.

III.4 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition A est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on montre alors que cela mène à une contradiction.

Exemple 17. On rappelle qu'un nombre réel x admet un inverse s'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = 1$.

Montrer que le nombre 0 n'admet pas d'inverse.

Solution :

Supposons que 0 admette un inverse. Cela signifie qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $0 \times y = 1$.

On obtient donc $0 = 1$, ce qui est absurde.

III.5 Raisonnement par récurrence

Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à un entier n_0 (en général 0 ou 1), on procède de la manière suivante :

- Initialisation : on montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : on montre que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geq n_0$, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Une fois cela établi, on en conclut que cette propriété est vraie pour tous les nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0 .

Exemple 18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq (n + 1)!$.

Solution : Montrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $2^n \leq (n + 1)!$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, $2^0 = 1$ et $(0 + 1)! = 1$ donc on a bien $2^0 \leq (0 + 1)!$.
- Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. On va montrer qu'alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

On a

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n$$

Or, par hypothèse de récurrence, $2^n \leq (n + 1)!$. On en déduit donc que $2^{n+1} \leq 2 \times (n + 1)!$.

De plus, comme $2 \leq (n + 2)$, on en déduit :

$$2^{n+1} \leq (n + 2) \times (n + 1)! \leq (n + 2)!$$

Par conséquent $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

III.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Un raisonnement par analyse-synthèse permet en général de montrer qu'il existe une solution à un problème. Le raisonnement se déroule en deux étapes :

- **l'analyse** : on suppose qu'une solution existe. Par une suite d'implications on en déduit la ou les valeurs possibles pour les solutions.
- **la synthèse** : pour chacune des valeurs obtenues, on vérifie qu'elles sont bien solutions.

Exemple 19. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ et que f est impaire si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il existe une unique fonction paire P et une unique fonction impaire I telles que $f = P + I$.

Solution :

- *Analyse :* Supposons qu'il existe une fonction paire P et une fonction impaire I telles que $f = P + I$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + I(x) \\ f(-x) = P(-x) + I(-x) \end{cases}$$

En utilisant le fait que P est paire et que I est impaire, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + I(x) \\ f(-x) = P(x) - I(x) \end{cases}.$$

Enfin, la résolution de ce système permet de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

Ceci prouve que si P et I existent, alors elles sont uniques.

- *Synthèse :* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Il est immédiat de vérifier que la fonction P est paire, que la fonction I est impaire et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) + I(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Cela prouve que les fonctions P et I conviennent.

Remarque.

- *Condition nécessaire / suffisante.*

Dans l'analyse, on a montré que, pour que les fonctions P et I existent, il est nécessaire qu'elles soient définies par $P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Dans la synthèse, on montre qu'il suffit de définir P et I par ces expressions pour qu'elles soient solution du problème.

- Si $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, on a par exemple $P(x) = 3x^2 + 1$ et $I(x) = x^3 + 2x$.

IV Ensembles

IV.1 Quelques exemples d'ensembles

Ensembles définis comme une liste d'éléments

- $\{1; 2; 3\}$
- $\{a; b; c\}$
- $\{a\}$: singleton.

Ensembles d'éléments vérifiant une propriété :

- $\left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 5x + 1 \geq 0\right\} = \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right[$
- $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq 10\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \text{ est pair}\}$
- $\{x \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } x^2 \leq 1\}$

Ensembles d'éléments décrit par un paramètre :

- $\{5x + 1 \text{ tel que } x \in \mathbb{R}\} = [1; +\infty[$
- $\{2k \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}$

IV.2 Généralités sur les ensembles

Définition 1.11

L'ensemble vide est l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\emptyset$.

Définition 1.12

Soient A et B deux ensembles. On dit que B est une **partie** ou un **sous-ensemble** de A si, et seulement si, tous les éléments de B sont des éléments de A. On note $B \subset A$. On dit que B est inclus dans A.

Par convention, pour tout ensemble A, $\emptyset \subset A$.

Définition 1.13

Deux ensembles A et B sont **égaux** (on note $A = B$) si, et seulement si, chaque élément de A est aussi dans B et chaque élément de B est aussi dans A. Autrement dit, $A = B$ si, et seulement si, $A \subset B$ et $B \subset A$.

Définition 1.14

La **réunion** $A \cup B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Exemple 20. Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 7\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 7\}$.

Proposition 1.15

Soit A, B, C des ensembles. Alors,

- $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativité)
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \subset A \cup B$

Remarque. Il est possible de prouver formellement la Proposition 1.15 à partir de la définition 1.14. Il est cependant important de retrouver très rapidement ce genre de résultats (voir également la Proposition 1.17) en faisant un diagramme.

Remarque. La définition de la réunion se généralise à plus de deux ensembles :

- Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles. On définit,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

- On définit également l'**union quelconque** d'ensembles. Si I est un ensemble (fini ou infini) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I \text{ tel que } x \in A_i\}.$$

Ici, la variable i est muette : on peut par exemple la remplacer i par j . Ainsi, $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in I} A_j$.

Définition 1.16

L'**intersection** $A \cap B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Exemple 21. Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 7\}$, alors $A \cap B = \{2\}$.

On peut bien entendu écrire une proposition similaire à la proposition 1.15 pour l'intersection (laissé au lecteur).

Remarque. La définition de la réunion se généralise à plus de deux ensembles :

- Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles. On définit,

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

- On définit également l'**intersection quelconque** d'ensembles. Si I est un ensemble (fini ou infini),

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I \text{ tel que } x \in A_i\}.$$

Ici aussi, la variable i est muette : on peut par exemple la remplacer i par j . Ainsi, $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in I} A_j$.

Proposition 1.17

Soit A, B, C des ensembles. Alors,

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Remarque. La proposition précédente s'interprète comme une « distributivité » de $\cap$ sur $\cup$ et inversement.

Définition 1.18

Deux ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$

IV.3 Produit cartésien d'ensembles

Définition 1.19

Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de A et B est l'ensemble, noté $A \times B$ constitué des couples $(x; y)$ où $x \in A$ et $y \in B$. On a ainsi :

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Exemple 22. Si $A = \{a; b\}$ et $B = \{5; 6; 7\}$, alors $A \times B = \{(a; 5); (a; 6); (a; 7); (b; 5); (b; 6); (b; 7)\}$.

On généralise la définition du produit cartésien à un produit de plus de deux ensembles avec la définition suivante.

Définition 1.20

Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles non vides. On définit le produit cartésien des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ par :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid \forall 1 \leq i \leq n, x_i \in A_i\}$$

Si A est un ensemble, on note A^n le produit de A avec lui-même n fois.

Par exemple, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

On appelle n -uplet un élément de A^n .

Fin du cours du 17 septembre 2026

Chapitre 2

Suites numériques

I Généralités

Définition 2.1

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite numérique u est une fonction définie sur $E_{n_0} = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{cases} E_{n_0} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \longmapsto u(n) \end{cases}$$

Remarque.

Plutôt que de noter $u(n)$, on préfère généralement noter u_n (appelé le « terme d'indice n de la suite »). De plus, on note parfois $(u_n)_{n \geq n_0}$ la suite u .

Définition 2.2

- Définir une suite par une formule explicite, c'est exprimer chaque terme de la suite en fonction de n
- Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent.

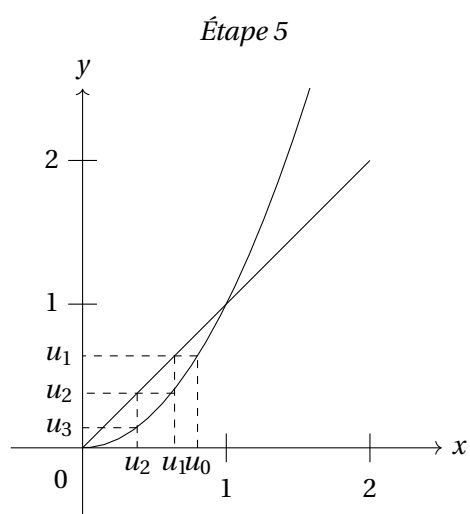
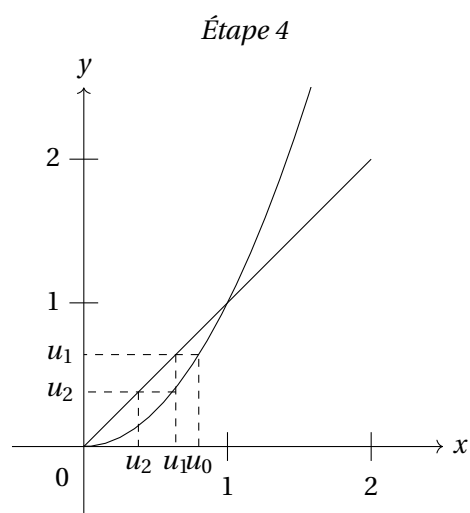
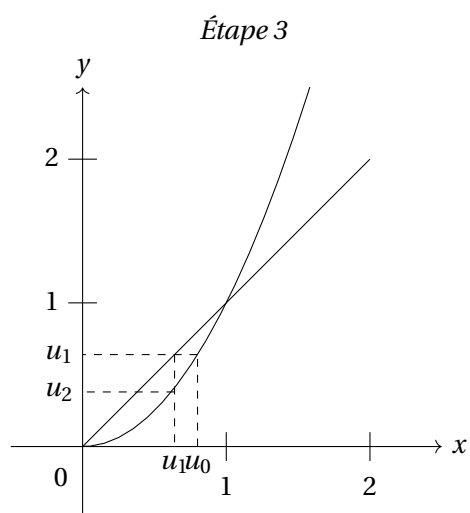
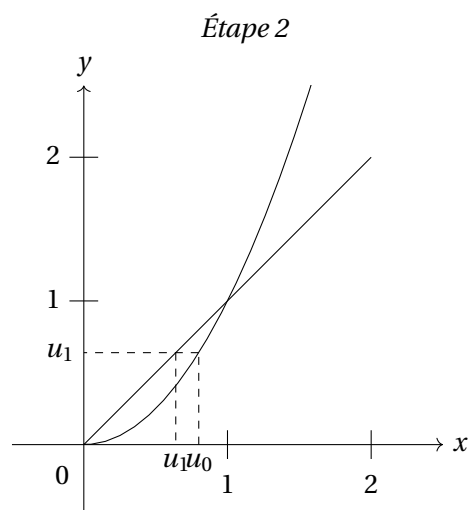
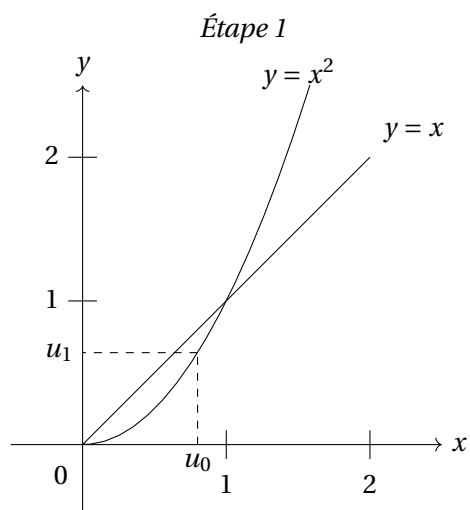
Méthode – Représenter une suite définie par récurrence

- On trace la courbe représentative de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$
- On trace la droite d'équation $y = x$.
- On construit les termes u_n de proche en proche en utilisant les deux courbes.

Exemple 23.

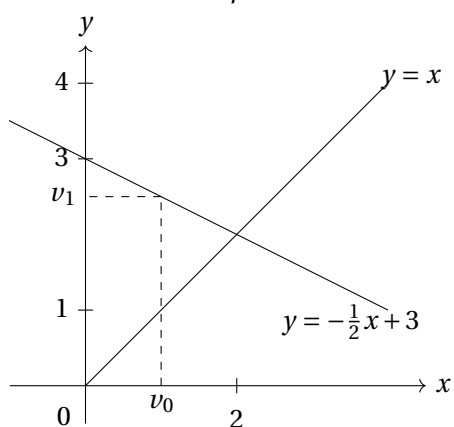
Représenter graphiquement les suites u et v définies par $\begin{cases} u_0 = 0,8 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n + 3 \end{cases}$

Solution : On construit les termes u_0, u_1, u_2, u_3 , etc., les uns après les autres.

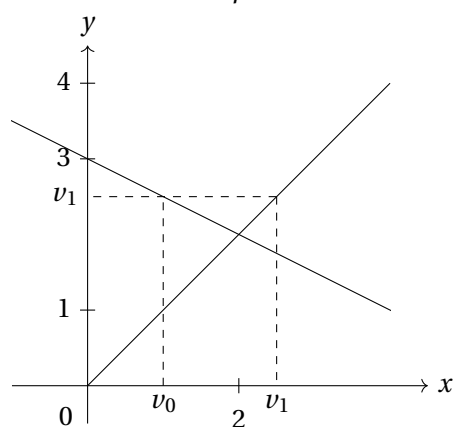


Pour la suite v , on construit de même les termes v_0, v_1, v_2, v_3 , etc., les uns après les autres.

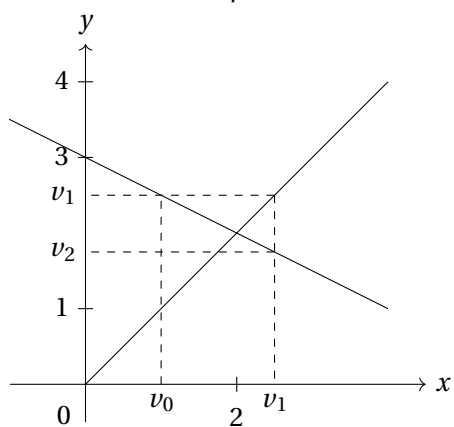
Étape 1



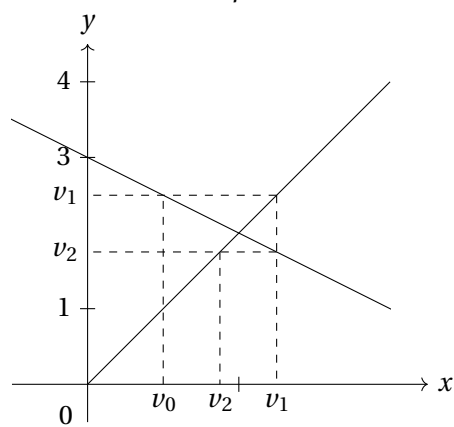
Étape 2



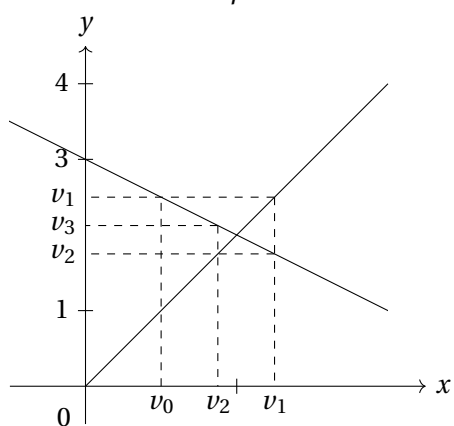
Étape 3



Étape 4

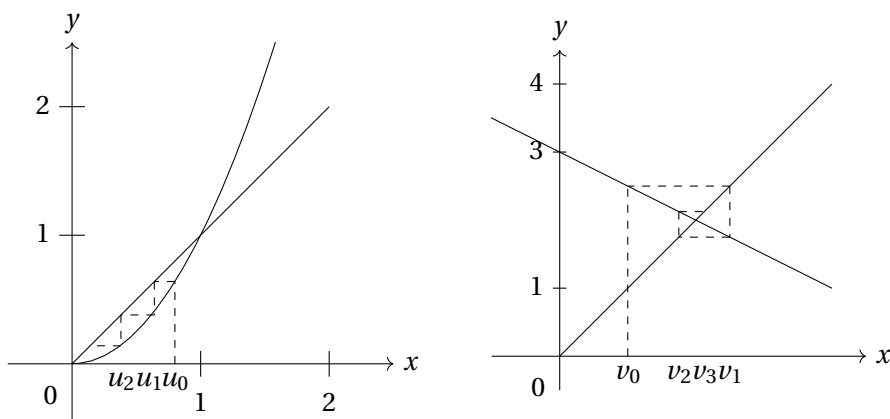


Étape 5



Remarque. En général, on ne trace pas tous les traits de construction mais on fait seulement apparaître les pointillés entre les deux courbes de la manière ci-dessous. On obtient souvent une figure

« en escalier » ou « en spirale ».



Définition 2.3

- Une suite u est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier n , $u_n \leq M$. Le réel M est appelé un majorant de u .
- Une suite u est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier n , $u_n \geq m$. Le réel m est appelé un minorant de u .
- Une suite est **bornée** si elle est minorée et majorée.

Définition 2.4

- Une suite u est **croissante** si pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite u est **décroissante** lorsque, pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Remarque.

- Si l'inégalité vérifiée par la suite est stricte, on dit que la suite est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).
- Attention! Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes.
Par exemple, c'est le cas de la suite u définie par $u_n = (-1)^n$.

Méthode – Différentes façon de déterminer le sens de variation d'une suite

1. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. Si la suite est définie de manière explicite, on peut étudier le sens de variation de la fonction f telle que $u_n = f(n)$.
3. Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple 24.

Étudier le sens de variation de la suite u définie pour tout $n > 0$ par $u_n = \frac{1}{n}$.

Solution :

On va prouver que u est décroissante à l'aide des trois méthodes.

- Méthode 1 :

Pour tout $n > 0$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n > 0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc $u_{n+1} \leq u_n$
donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• Méthode 2 :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout $n > 0$:

$$\begin{aligned} n &\leq n+1 \\ \text{donc } f(n+1) &\leq f(n) \quad (\text{car } f \text{ est décroissante sur }]0; +\infty[) \\ \text{donc } u_n &\leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Cela prouve donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• Méthode 3 :

Pour tout $n > 0$, $u_n > 0$.

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{n}{n+1} < 1 \quad (\text{car } n < n+1) \end{aligned}$$

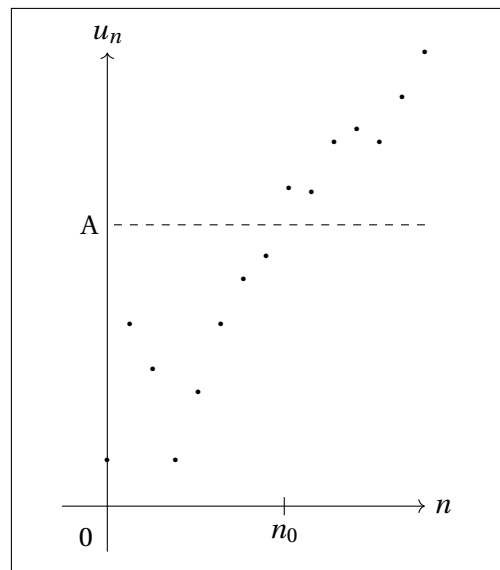
Ainsi, pour tout $n > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ donc $u_{n+1} \leq u_n$ (car $u_n > 0$).

Finalement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Définition 2.5

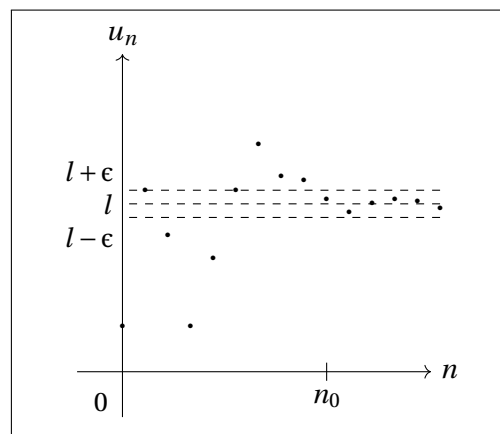
On dit que la suite u a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout réel A , on peut trouver un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à A .

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

**Définition 2.6**

On dit que la suite u a pour limite l quand n tend vers $+\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n sont à une distance de l inférieure à ε .

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

**Remarque.**

- La condition « u_n est à une distance de l inférieure à ε » peut s'écrire

$$|u_n - l| \leq \varepsilon$$

- On dit qu'une suite est convergente lorsqu'elle admet une limite finie l lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème 2.7 – des gendarmes

Soient u, v, w trois suites et soit $l \in \mathbb{R}$.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, et que $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$. Alors la suite v est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l.$$

Théorème 2.8 – convergence monotone

Toute suite croissante et majorée converge.

Remarque. On sait de plus que si une suite est croissante et qu'elle n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II Suites arithmétiques

Définition 2.9

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

- **Expression par récurrence :** $u_{n+1} = u_n + r$
- **Expression explicite :** $u_n = u_0 + nr$
- **Somme des termes :** nbre termes $\times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

À retenir : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 25. On place 300 euros à un taux de 5% (taux d'intérêts simples). Quelle est la valeur du capital au bout de 4 ans? Combien d'années doit-on attendre pour que le capital atteigne 400 euros?

Solution :

Les intérêts versés chaque année sont : $300 \times 0,05 = 15$ euros. Le capital de l'année n est donc donné par la suite arithmétique (u_n) de raison $r = 15$ et de premier terme $u_0 = 300$.

Après 4 ans, le capital est $u_4 = u_0 + 4r = 360$ euros.

Pour déterminer le nombre d'années pour que le capital atteigne 400 euros, on résout :

$$\begin{aligned} u_n &\geq 400 \\ \Leftrightarrow u_0 + nr &\geq 400 \\ \Leftrightarrow nr &\geq 400 - u_0 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{400 - u_0}{r} \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{100}{15} \end{aligned}$$

Or, $\frac{100}{15} \approx 6,67$ donc il faudra attendre 7 ans.

III Suites géométriques

Définition 2.10

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **géométrique** s'il existe $q \neq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q u_n$$

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

- **Expression par récurrence :** $u_{n+1} = q u_n$

• **Expression explicite :** $u_n = u_0 q^n$

• **Somme des termes :** premier terme $\times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbre termes}}}{1 - \text{raison}}$.

Exemple 26. Calculer $\sum_{k=0}^{10} 2^k$.

Solution :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

De plus,

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=0}^{10} u_k = 1 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 1024.$$

Exemple 27. On place 300 euros à un taux de 5% (taux d'intérêts composés). Quelle est la valeur du capital au bout de 4 ans? Combien d'années doit-on attendre pour que le capital atteigne 400 euros?

Solution :

Le capital de l'année n est donné par la suite géométrique (u_n) de raison $r = 1,05$ et de premier terme $u_0 = 300$.

Après 4 ans, le capital est : $u_4 = u_0 q^4 = 300 \times 1,05^4 \approx 364,7$ euros.

pour déterminer le nombre d'années pour que le capital atteigne 400 euros, on résout :

$$\begin{aligned} u_n &\geq 400 \\ \Leftrightarrow u_0 q^n &\geq 400 \\ \Leftrightarrow q^n &\geq \frac{400}{u_0} \\ \Leftrightarrow n \ln(q) &\geq \ln\left(\frac{400}{u_0}\right) \quad \text{car } \ln \text{ est strict. croissante} \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln\left(\frac{400}{u_0}\right)}{\ln(q)} \quad \text{car } \ln(q) > 0 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln\left(\frac{400}{300}\right)}{\ln(1,05)} \end{aligned}$$

Or, $\frac{\ln\left(\frac{400}{300}\right)}{\ln(1,05)} \approx 5,9$ donc il faudra attendre 6 ans.

IV Suites arithmético-géométriques

Définition 2.11

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a u_n + b$$

Méthode – Expression des suites arithmético-géométriques

Pour déterminer les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$,

- On commence par déterminer une suite constante égale à un réel c vérifiant la relation de récurrence.
- On pose $v_n = u_n - c$.
- On montre que v_n est une suite géométrique pour en déduire l'expression de v_n puis de u_n .

Exemple 28. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n + 3$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Solution :

- Soit $c \in \mathbb{R}$. La suite définie par $u_n = c$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) vérifie la relation de récurrence si, et seulement si,

$$c = 4c + 3,$$

c'est-à-dire $c = -1$.

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n + 3$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - c = u_n + 1$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 4u_n + 3 \quad \text{donc} \quad (v_{n+1} - 1) = 4(v_n - 1) + 3 \\ &\quad \text{donc} \quad v_{n+1} = 4v_n \end{aligned}$$

Par conséquent, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 4.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 4^n$.

De plus, $v_0 = u_0 + 1 = 5$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 5 \times 4^n - 1.$$

Enfin, on vérifie réciproquement que la suite définie par $u_n = 5 \times 4^n - 1$ vérifie bien la condition.

En effet, on a $u_0 = 5 \times 4^0 - 1 = 4$.

De plus,

$$\begin{aligned} 4u_n - 3 &= 4(5 \times 4^n - 1) + 3 \\ &= 4 \times 5 \times 4^n - 4 + 3 \\ &= 5 \times 4^{n+1} - 1 \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

Remarque. Ici, la réciproque est indispensable car nous avons raisonné seulement par implications successives dans la première partie. Il s'agit en quelque sorte d'une analyse-synthèse. En pratique, on écrira généralement la phrase « on vérifie réciproquement que la suite définie par $u_n = 5 \times 4^n - 1$ vérifie bien la condition » sans donner les détails des calculs qui permettent de le vérifier.

V Suites récurrentes d'ordre deux

Proposition 2.12

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$). On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On considère l'équation $x^2 = ax + b$ dont le discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$.

- Si l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 (c'est-à-dire si $\Delta > 0$), alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique solution réelle r_0 (c'est-à-dire si $\Delta = 0$), alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n.$$

- Si l'équation $x^2 = ax + b$ n'admet aucune solution réelle (c'est-à-dire si $\Delta < 0$), en posant $\theta \in \left] -\frac{1}{\pi}2; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{a}$, alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \sqrt{-b}^n \cos(\theta n) + \mu \sqrt{-b}^n \sin(\theta n).$$

Démonstration. On ne démontre que le premier point de la proposition, les deux autres points se démontrant de manière analogue. On se place ainsi dans le cas où l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux solutions réelles r_1 et r_2 .

$\Rightarrow$: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation (R).

On souhaite montrer qu'il existe λ et μ tels que $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

Dans un premier temps, on va supposer que de tels réels λ et μ existent afin d'obtenir davantage d'informations sur ces réels.

On aurait nécessairement

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 + \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases} & \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1} \begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 - r_1 u_0 = (r_2 - r_1)\mu \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow{} \begin{cases} \lambda = u_0 - \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \\ \mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow{} \begin{cases} \lambda = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} \\ \mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \end{cases} \end{aligned}$$

On est maintenant en mesure de prouver le résultat souhaité.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation (R). On pose $\lambda = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1}$ et $\mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}$.

On va montrer par récurrence double que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Il est facile de vérifier que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies (on a choisi λ et μ pour cela).
- Hérédité : Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, la propriété est vraie au rang n et au rang $n+1$ et montrons qu'alors elle est vraie au rang $n+2$.

On a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\
 &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\
 &= \lambda r_1^n (ar_1 + b) + \mu r_2^n (ar_2 + b) \\
 &= \lambda r_1^n \times r_1^2 + \mu r_2^n \times r_2^2 \\
 &= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}
 \end{aligned}$$

et la propriété est bien démontrée au rang $n+2$.

$\Leftarrow$: Réciproquement, on suppose que (u_n) est de la forme $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. En utilisant le fait que $r_1^2 = ar_1 + b$ et que $r_2^2 = ar_2 + b$, on montre que (u_n) vérifie la relation (R). Le calcul est en tout point analogue au précédent. $\square$

Exemple 29. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Solution :

On résout l'équation $x^2 = 3x - 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 = 5$.

L'équation admet donc deux solutions réelles : $r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Fin du cours du 17 septembre 2026
