

Rappels sur les fonctions de références

Yannick VINCENT
2026/2027

Table des matières

I. Fonctions affines	1
II. Fonction carrée	2
III. Fonction inverse	3
IV. Fonction racine carrée	4
V. Fonction cube	5
VI. Fonction valeur absolue	5
1. Valeur absolue d'un nombre réel	5
2. Fonction valeur absolue	6
VII. Fonctions trigonométriques	7
1. Définition et généralités	7
2. Étude des fonctions trigonométriques	7

I. Fonctions affines

Définition 1

Une fonction affine est une fonction de la forme

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto mx + p \end{cases}$$

où m et p sont des réels.

Remarque.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Définition 2

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

- m est appelé le coefficient directeur. Si $m = 0$, la fonction f est dite **constante**.
- p est appelé **ordonné à l'origine**. Si $p = 0$, la fonction f est dite **linéaire**.

Proposition 1

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m.$$

Exemple 1.

Soit $A(1; 2)$ et $B(3; 7)$.

Déterminer la fonction affine f dont la courbe représentative est la droite (AB) .

Solution :

f est de la forme $f(x) = mx + p$.

Or, les points A et B appartiennent à la courbe représentative de f donc $f(1) = 2$ et $f(3) = 7$.

$$\text{On a donc } m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{7 - 2}{3 - 1} = \frac{5}{2}.$$

Ainsi, f est de la forme $f(x) = \frac{5}{2}x + p$.

Comme $f(1) = 2$, on a :

$$\frac{5}{2} \times 1 + p = 2$$

$$\text{Donc } p = 2 - \frac{5}{2}$$

$$\text{Donc } p = -\frac{1}{2}.$$

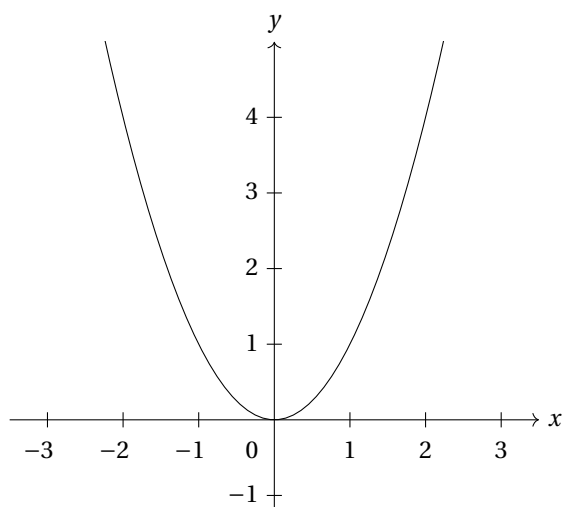
Finalement, f est la fonction définie par $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$.

II. Fonction carrée

Définition 3

La fonction carrée est définie comme étant la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$



Fonction carrée

Proposition 2

- La fonction carrée est paire.
- La fonction carrée est positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			

Remarque. « La fonction carrée est paire » signifie que; pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe de la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

III. Fonction inverse

Définition 4

La fonction inverse est définie comme étant la fonction

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{cases}$$

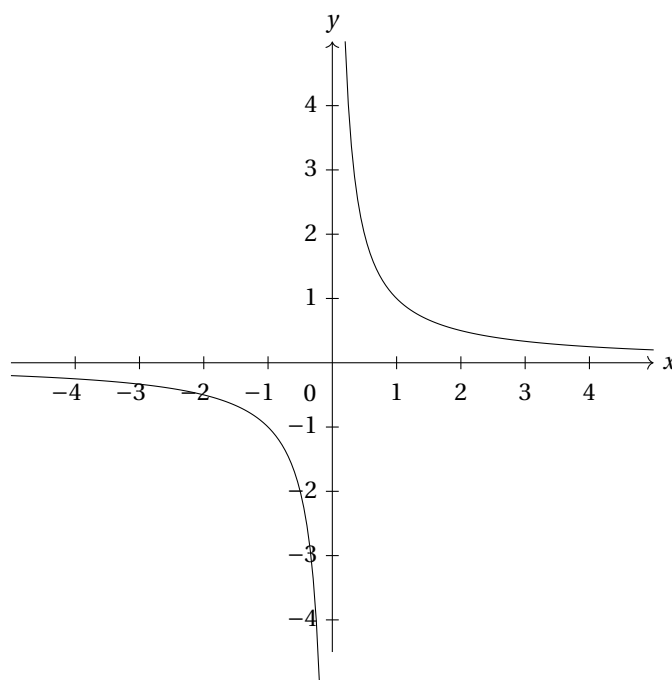
Remarque.

Le calcul d'image suivant justifie le nom de « fonction inverse » :

Pour tous entiers a et b non nuls,

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

Or, $\frac{b}{a}$ est bien l'inverse de $\frac{a}{b}$.



Fonction inverse

Proposition 3

- La fonction inverse est impaire.
- La fonction inverse est strictement négative sur $]-\infty; 0[$ et strictement positive sur $]0; +\infty[$.
- La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

Remarque. «La fonction inverse est impaire» signifie que; pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque.

Il serait FAUX de dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$!

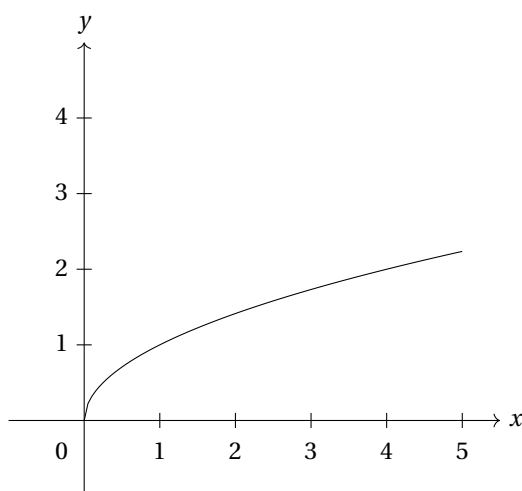
Par exemple, avec $a = -1$ et $b = 1$, on voit que $a \leq b$ et que $f(a) \geq f(b)$.

IV. Fonction racine carrée

Définition 5

La fonction racine carrée est définie comme étant la fonction

$$f: \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$$



Fonction racine carrée

Remarque.

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$,

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Proposition 4

- La fonction racine carrée est positive sur $[0; +\infty[$.
- La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

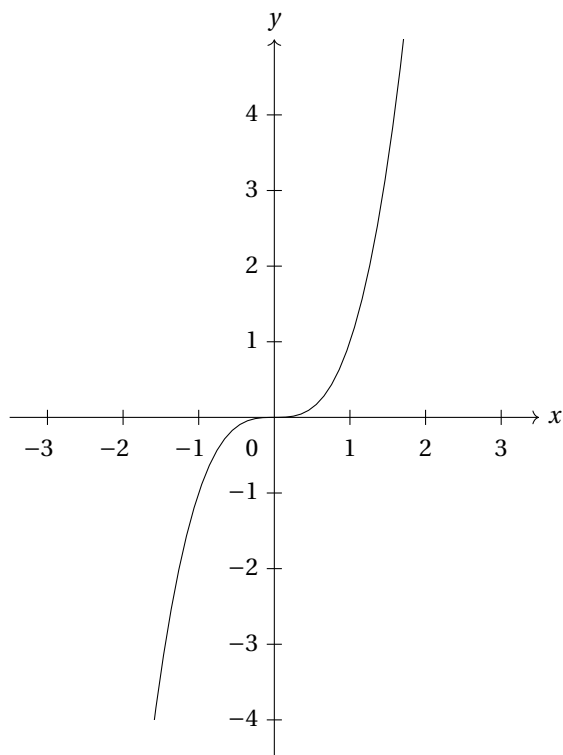
x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$

V. Fonction cube

Définition 6

La fonction cube est définie comme étant la fonction

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^3 \end{cases}$$



Fonction cube

Proposition 5

- La fonction cube est impaire.
- La fonction cube est négative sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$.
- La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		

VI. Fonction valeur absolue

1. Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 7

Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x est notée $|x|$ et définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

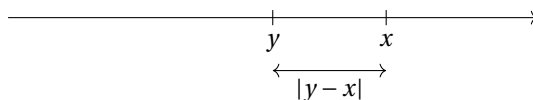
Exemple 2.

- $|2| = 2$ (car $2 \geq 0$);
- $|-2| = -(-2) = 2$ (car $-2 < 0$).

Proposition 6

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

- La distance entre x et 0 est $|x|$.
- La distance entre x et y est $|y - x|$.



Démonstration.

- La distance entre x et 0 est x ou $-x$ selon si x est positif ou négatif. C'est, par définition, la valeur absolue de x .
- La distance entre x et y est $y - x$ si $y \geq x$ et $x - y$ si $x \geq y$. Dans tous les cas, il s'agit bien de la valeur absolue $|y - x|$ car $x - y = -(y - x)$.

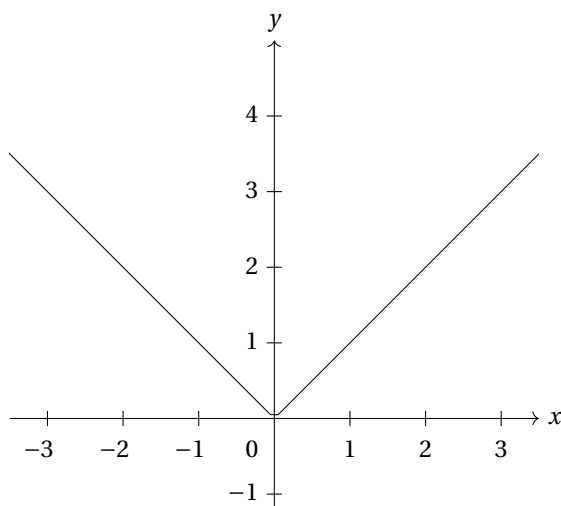
□

2. Fonction valeur absolue

Définition 8

La fonction valeur absolue est définie comme étant la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto |x| \end{cases}$$



Fonction valeur absolue

Proposition 7

- La fonction valeur absolue est paire.
- La fonction valeur absolue est positive.
- La fonction valeur absolue est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

VII. Fonctions trigonométriques

1. Définition et généralités

Définition 9

1. La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
2. La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

Proposition 8

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .
Cela signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

Démonstration.

En utilisant le cercle trigonométrique, on sait que les réels x et $x + 2\pi$ ont le même point image sur le cercle. Par conséquent, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. $\square$

Proposition 9

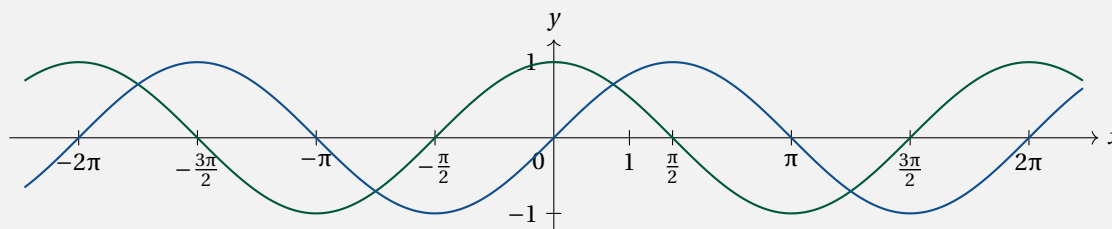
1. La fonction cosinus est paire.
2. La fonction sinus est impaire.

Démonstration.

En utilisant le cercle trigonométrique, on sait que pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos(x)$ et que $\sin(-x) = -\sin(x)$. Cela traduit exactement le fait que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire. $\square$

Proposition 10

Les courbes des fonctions cosinus et sinus sont représentées ci-dessous.



1. Les fonctions cosinus et sinus étant 2π -périodiques, leur courbe représentative sont invariantes par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
2. La fonction cosinus étant paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. La fonction sinus étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition 10

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont appelées des **sinusoïdes**.

2. Étude des fonctions trigonométriques

Remarque.

Pour connaître les courbes des fonctions cosinus et sinus sur $\mathbb{R}$, il suffit de les connaître sur $[0; \pi]$. On obtient ensuite les courbes sur $\mathbb{R}$ par le procédé suivant :

- On trace les courbes sur $[-\pi; \pi]$ en utilisant les symétries dues au fait que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

- On trace ensuite les courbes sur $\mathbb{R}$ en utilisant la périodicité des fonctions cosinus et sinus.

On restreint ainsi l'étude qui suit à l'intervalle $[0; \pi]$.

Proposition 11

Les tableaux de variations des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$ sont :

x	0	π
$\cos(x)$	1	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	1	0

Démonstration.

Les variations des fonctions cosinus et sinus se déduisent directement du cercle trigonométrique. $\square$

Proposition 12

Les tableaux de signe des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$ sont :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	+	0	-

x	0	π	
$\sin(x)$	0	+	0

Démonstration.

Le signe des fonctions cosinus et sinus se déduit directement du cercle trigonométrique. $\square$

Remarque.

Les changements de variations de la fonction cosinus se produisent au même moment que les changements de signe de la fonction sinus et inversement. Cela s'explique par la propriété suivante :

Proposition 13 – (admise)

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $\sin'(x) = \cos(x)$
2. $\cos'(x) = -\sin(x)$