

Bijections – preuves des principaux résultats

Théorème

Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est bijective si, et seulement si, il existe une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$\text{pour tout } x \in E, \quad g \circ f(x) = x \text{ et pour tout } y \in F, \quad f \circ g(y) = y.$$

De plus, la fonction g est unique. On l'appelle la bijection réciproque de f , et on la note f^{-1} .

Démonstration. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Supposons que f est bijective. On définit l'application $g : F \longrightarrow E$ de la façon suivante :

Pour tout $y \in F$, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f .

g est bien défini car cet antécédent appartient à E .

Montrons maintenant que, pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = x$.

Soit $x \in E$,

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Or, x est un antécédent de $f(x)$ par f (c'est le seul car f est bijective) donc, par définition de g , on a $g \circ f(x) = x$.

De même, montrons que, pour tout $y \in F$, $f \circ g(y) = y$.

Soit $y \in F$,

$$f \circ g(y) = f(g(y)).$$

Or, par définition de y , $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f . Son image par f est donc y et on a bien $f \circ g(y) = y$.

- Réciproquement, supposons qu'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = x$ et pour tout $y \in F$, $f \circ g(y) = y$.

Montrons que f est alors bijective.

Comme pour tout $y \in F$, $f(g(y)) = y$, on voit que tout $y \in F$ admet $g(y)$ comme antécédent. Montrons qu'il s'agit en fait du seul.

Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in F$ admettant deux antécédents par f notés x_1 et x_2 , avec $x_1 \neq x_2$.

On a, d'une part, $g(y) = g(f(x_1)) = x_1$ et, d'autre part, $g(y) = g(f(x_2)) = x_2$. On en déduit ainsi que $x_1 = x_2$, ce qui est absurde. Il en résulte au final que tout $y \in F$ admet un unique antécédent par f , ce qui signifie exactement que f est bijective.

- Montrons enfin que l'application g est unique. Supposons qu'il existe deux applications g_1 et g_2 qui conviennent.

Supposons par l'absurde que $g_1 \neq g_2$.

Il existe $y \in F$ tel que $g_1(y) \neq g_2(y)$.

Par conséquent, $f(g_1(y)) \neq f(g_2(y))$ car f est bijective (deux éléments différents ne peuvent pas avoir la même image par f).

Cela implique que $y \neq y$, ce qui est absurde.

□

Proposition – Représentation graphique

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective. Alors la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Démonstration. On utilise le fait que le symétrique d'un point $M(x; y)$ par rapport à la première bissectrice est le point $M'(y; x)$.

Ainsi, pour tout $(x; y) \in I \times J$,

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C}_f &\iff y = f(x) \\ &\iff x = f^{-1}(y) \\ &\iff M'(y; x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}} \end{aligned}$$

□



Proposition

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection, soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Supposons que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en y_0 et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Démonstration. Soit $y, y_0 \in J$. Soient $x, x_0 \in I$ tels que $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. On s'intéresse au taux de variation $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ lorsque y tend vers y_0 (c'est-à-dire lorsque x tend vers x_0).

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f'(x_0)} \quad (\text{car } f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0) \neq 0) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \end{aligned}$$

d'où le résultat. □