

Quasi-convexité - corrigé des exercices

Ce corrigé donne les résultats et les principales étapes intermédiaires des calculs. Il ne s'agit toutefois pas d'une rédaction type que l'on pourrait prendre comme modèle.

Exercice 1.

Soit $f : (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_*^+)^2 \mapsto x_1^2 + x_2^2$.

Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ et $Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice Hessienne $Hf(x_1, x_2)$ est définie positive (pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$), donc f est strictement concave sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$. Elle est *a fortiori* concave et donc quasi-concave sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$.

On peut également retrouver la quasi-convexité de f à l'aide de la matrice bordée :

$$\overline{H}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 2 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\overline{H}f| &= -(2x_1) \begin{vmatrix} 2x_1 & 0 \\ 2x_2 & 2 \end{vmatrix} + (2x_2) \begin{vmatrix} 2x_1 & 2 \\ 2x_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -8x_1^2 - 8x_2^2 \\ &= -8(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $|\overline{H}f(x_1, x_2)| < 0$ pour tout $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$, ce qui prouve que f est quasi-convexe sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$.

Exercice 2.

Soit $f : (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_*^+)^2 \mapsto \frac{x_1}{x_2^2}$.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} \\ -\frac{2x_1}{x_2^3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{x_2^3} \\ -\frac{2}{x_2^3} & \frac{6x_1}{x_2^4} \end{pmatrix}.$$

De plus, la matrice Hessienne bordée est

$$\overline{H}f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x_2^2} & -\frac{2x_1}{x_2^3} \\ \frac{1}{x_2^2} & 0 & -\frac{x_2^3}{2} \\ \frac{2x_1}{x_2^3} & -\frac{2}{x_2^3} & \frac{6x_1}{x_2^4} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= -\frac{1}{x_2^2} \begin{vmatrix} \frac{1}{x_2^2} & -\frac{2}{x_2^3} \\ -\frac{2x_1}{x_2^3} & \frac{6x_1}{x_2^4} \end{vmatrix} + \left(-\frac{2x_1}{x_2^3}\right) \begin{vmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ -\frac{2x_1}{x_2^3} & -\frac{2}{x_2^3} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{x_2^2} \left(\frac{6x_1}{x_2^6} - \frac{4x_1}{x_2^6}\right) + \left(-\frac{2x_1}{x_2^3}\right) \left(-\frac{2}{x_2^5}\right) \\ &= -\frac{2x_1}{x_2^8} + \frac{4x_1}{x_2^8} = \frac{2x_1}{x_2^8} > 0. \end{aligned}$$

Ce déterminant change de signe selon le signe de x_1 . Au final, f est bien quasi-concave sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$.



Exercice 3.

Soit $f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1^3 + x_2^3$.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 3x_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix}.$$

Remarque : La matrice Hessienne n'est ni (semi-définie) positive en tout point de $\mathbb{R}^2$, ni (semi-définie) négative en tout point de $\mathbb{R}^2$. on en déduit que f n'est ni convexe ni concave.

La matrice Hessienne bordée est :

$$\overline{H}f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 3x_1^2 & 3x_2^2 \\ 3x_1^2 & 6x_1 & 0 \\ 3x_2^2 & 0 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= -(3x_1^2) \begin{vmatrix} 3x_1^2 & 0 \\ 3x_2^2 & 6x_2 \end{vmatrix} + (3x_2^2) \begin{vmatrix} 3x_1^2 & 6x_1 \\ 3x_2^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -54x_1^4x_2 - 54x_1^2x_2^4 \\ &= -54x_1^2x_2(x_1^2 + x_2^3). \end{aligned}$$

Ce déterminant change de signe selon (x_1, x_2) . Au final, f n'est ni quasi-convexe ni quasi-concave sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

Soit $f : (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_*^+)^2 \mapsto x_1x_2$.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice Hessienne n'est pas (semi-définie) positive ou négative, donc f n'est ni convexe ni concave.

$$\overline{H}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= -x_2 \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_1 & 0 \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} x_2 & 0 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -x_2(-x_1) + x_1(x_2) \\ &= x_1x_2 + x_1x_2 = 2x_1x_2 > 0. \end{aligned}$$

Au final, f est quasi-concave sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$.

