

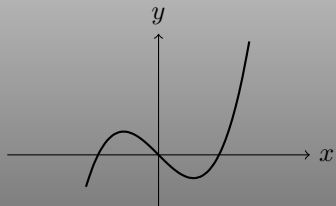
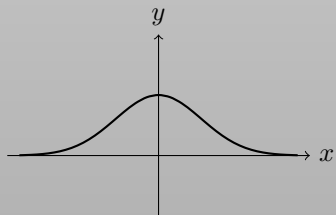
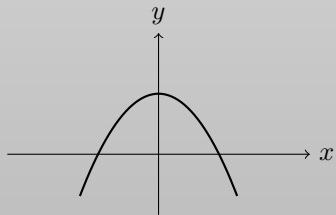
Quasi-convexité

Yannick VINCENT

yannick.vincent@umontpellier.fr

Université de Montpellier





Définition

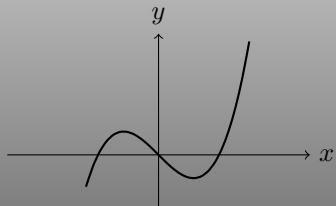
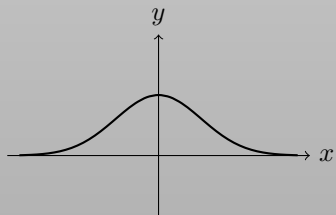
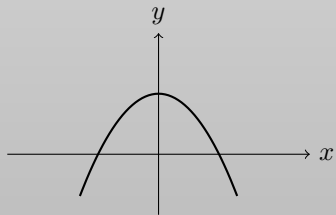
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **quasi-concave** si pour tout $x, y \in D$, pour tout $z \in [x, y]$,

$$f(z) \geq f(x) \quad \text{ou} \quad f(z) \geq f(y).$$

Définition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **quasi-convexe** si pour tout $x, y \in D$, pour tout $z \in [x, y]$,

$$f(z) \leq f(x) \quad \text{ou} \quad f(z) \leq f(y).$$



Proposition

Si f est convexe, alors f est quasi-convexe.

Proposition

Si f est concave, alors f est quasi-concave.

Définition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles d'ordre deux existent. On appelle matrice Hessienne bordée de f en (x_1, x_2) la matrice

$$\overline{H}(x_1; x_2) = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles d'ordre deux existent et sont continues.

- Si pour tout $(x_1; x_2) \in D$, $|\overline{H}(x_1; x_2)| < 0$, alors f est quasi-convexe.
- Si pour tout $(x_1; x_2) \in D$, $|\overline{H}(x_1; x_2)| > 0$, alors f est quasi-concave.

Exemple

Soit $f : (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_*^+)^2 \mapsto x_1^2 x_2^2$.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^2 \\ 2x_1^2 x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_2^2 & 4x_1 x_2 \\ 4x_1 x_2 & 2x_1^2 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{H}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_1 x_2^2 & 2x_1^2 x_2 \\ 2x_1 x_2^2 & 2x_2^2 & 4x_1 x_2 \\ 2x_1^2 x_2 & 4x_1 x_2 & 2x_1^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\overline{H}| &= -2x_1 x_2^2 \begin{vmatrix} 2x_1 x_2^2 & 4x_1 x_2 \\ 2x_1^2 x_2 & 2x_1^2 \end{vmatrix} + 2x_1^2 x_2 \begin{vmatrix} 2x_1 x_2^2 & 2x_2^2 \\ 2x_1^2 x_2 & 4x_1 x_2 \end{vmatrix} \\ &= 16x_1^4 x_2^4 > 0 \end{aligned}$$

Au final, f est quasi-concave.