

Convexité - exercices

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$.

1. Déterminer les plus grands intervalles I et J tels que f est convexe sur I et concave sur J .
2. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de f .

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2.$$

1. Calculer $Hf(x_1, x_2)$.
2. Montrer que f est concave sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1 + 6x_2 + 10$.

1. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet un minimum global et le déterminer.

Exercice 4.

Une fonction de coût total est donnée par $C(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + 100$, où x_1 et x_2 représentent les quantités produites d'un bien 1 et d'un bien 2.

1. Montrer que C est strictement convexe sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$. Interpréter économiquement cette propriété.
2. La fonction C admet-elle un minimum sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$?

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2x_2^2$.

1. Calculer $Hf(x_1, x_2)$.
2. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. f admet-elle un minimum local ? global ?