

Convexité - corrigé exercices

Exercice 1.

1. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 \text{ et } f''(x) = 6x - 12.$$

- Si $x < 2$, alors $f''(x) < 0$: f est concave sur $] -\infty, 2[$.
- Si $x > 2$, alors $f''(x) > 0$: f est convexe sur $]2, +\infty[$.

2. $f''(2) = 0$ et f'' change de signe en $x = 2$: le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion.

Exercice 2.

1. Calcul des dérivées partielles : $f_1 = -2x_1$, $f_{11} = -2$, $f_2 = 1$, $f_{22} = 0$, $f_{12} = 0$. Donc :

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Critère de Sylvester généralisé :

- $|H_{\{1\}}| = f_{11} = -2 \leq 0$,
- $|H_{\{2\}}| = f_{22} = 0 \leq 0$,
- $|H_{\{1,2\}}| = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0 \geq 0$,

Donc $Hf(x_1, x_2)$ est (semi-définie) négative et on en déduit que f est concave sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

1. Le calcul des dérivées partielles (d'ordre 1 et 2) permet d'obtenir $Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

On applique ensuite le critère de Sylvester :

- $|H_1| = f_{11} = 2 > 0$,
- $|H_2| = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 12 - 4 = 8 > 0$.

Donc pour tous $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $Hf(x_1, x_2)$ est définie positive. Par conséquent, f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2. Gradient : $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 5 \\ 6x_2 + 2x_1 + 6 \end{pmatrix}$. Résolution de $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} f_1 = 2x_1 + 2x_2 - 5 = 0 \\ f_2 = 2x_1 + 6x_2 + 6 = 0 \end{cases}$$

On résout et on montre que le système admet une unique solution : $(\frac{21}{4}, -\frac{11}{4})$.

Comme f est strictement convexe, ce point stationnaire est un minimum global. De plus, le minimum de f est $f(\frac{21}{4}, -\frac{11}{4}) = \frac{9}{8}$.

Exercice 4.

1. Matrice hessienne : $HC(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Critère de Sylvester :

- $|H_1| = C_{11} = 2 > 0$,
- $|H_2| = C_{11}C_{22} - C_{12}^2 = 8 - 1 = 7 > 0$.

Donc pour tout $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $HC(x_1, x_2)$ est définie positive : C est strictement convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Interprétation économique : La convexité stricte implique que les coûts marginaux C_1 et C_2 sont croissants : plus l'entreprise produit, plus le coût supplémentaire pour produire une unité supplémentaire augmente. Cela reflète à l'inverse le fait que les rendements sont décroissants.

2. $\nabla C(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 2x_2 + x_1 \end{pmatrix}$. on en déduit que pour tout $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\nabla C(x_1, x_2) \neq 0$. La fonction C n'admet donc pas de minimum sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Elle est simplement minorée par 0 mais 0 n'est pas un minimum car il n'est pas atteint.



Exercice 5.

1.

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 4x_2^2 & -8x_1x_2 \\ -8x_1x_2 & 12x_2^2 - 4x_1^2 \end{pmatrix}.$$

2. En $(1, 0)$: $Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, qui n'est ni (semi définie) positive ni (semi-définie) négative.

Par conséquent, f n'est ni convexe, ni concave sur $\mathbb{R}^2$.

3. Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 4x_1x_2^2 \\ 4x_2^3 - 4x_1^2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \\ 4x_2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$.

Après résolution, on en déduit que :

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \iff x_2 = -x_1.$$

Il existe donc une infinité de points stationnaires.

Pour $(x_1, -x_1)$, on a : $Hf(x_1, -x_1) = \begin{pmatrix} 8x_1^2 & 8x_1^2 \\ 8x_1^2 & 8x_1^2 \end{pmatrix}$. Par conséquent, en tout point stationnaire, la matrice Hessienne est semi-définie positive. Cela n'est pas suffisant pour conclure qu'il s'agit de minimum locaux.

En revanche, ici, on a, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2x_2^2 = (x_1^2 - x_2^2)^2 \geq 0.$$

Par conséquent, 0 est bien le minimum global (et *a fortiori* local) de f . il est atteint en chaque point stationnaire car, pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $f(x_1, -x_1) = 0$.