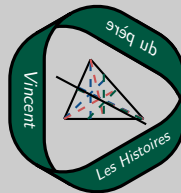


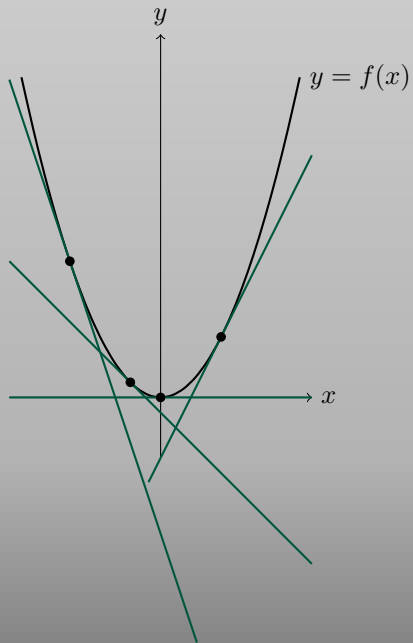
Convexité

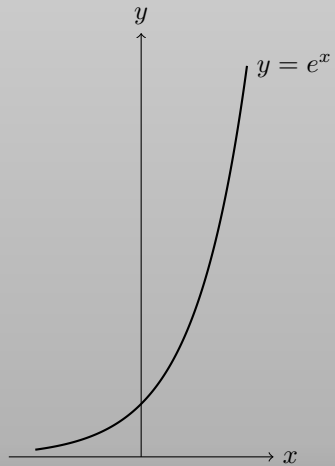
Yannick VINCENT

yannick.vincent@umontpellier.fr

Université de Montpellier



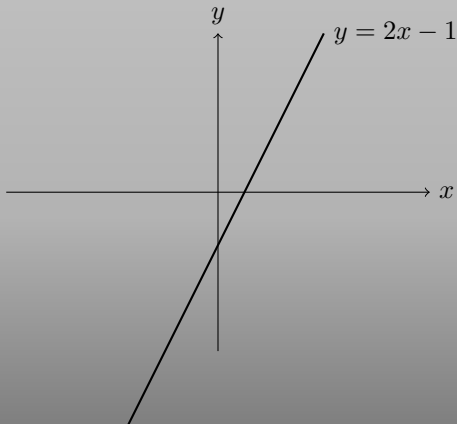




Proposition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

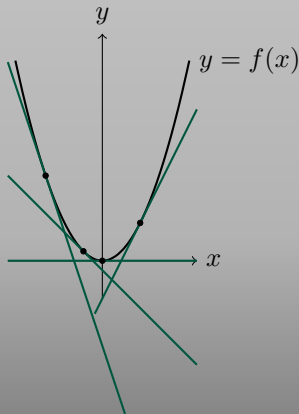
- Si la courbe de f est au dessus de ses tangentes, alors f est convexe.
- Si la courbe de f est strictement au dessus de ses tangentes, alors f est strictement convexe.



Proposition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I .

- Si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$, alors f est convexe.
- Si pour tout $x \in I$, $f''(x) > 0$, alors f est strictement convexe.



Proposition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles d'ordre deux existent et sont continues.

- Si pour tout $(x_1; x_2) \in D$, $Hf(x_1; x_2)$ est positive, alors f est convexe.
- Si pour tout $(x_1; x_2) \in D$, $Hf(x_1; x_2)$ est négative, alors f est concave.

Proposition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles d'ordre deux existent et sont continues.

- Si pour tout $(x_1; x_2) \in D$, $Hf(x_1; x_2)$ est définie positive, alors f est strictement convexe.
- Si pour tout $(x_1; x_2) \in D$, $Hf(x_1; x_2)$ est définie négative, alors f est strictement concave.

Proposition – Critère de Sylvester

Soit $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ une matrice symétrique.

- H est définie positive si, et seulement si, $|H_1| > 0$ et $|H_2| = |H| > 0$.
- H est définie négative si, et seulement si, $|H_1| < 0$ et $|H_2| = |H| > 0$.

$$|H_1| = r$$

$$|H_2| = rt - s^2$$

Proposition – Critère de Sylvester généralisé

Soit $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ une matrice symétrique.

- H est positive si, et seulement si, $|H_{\{1\}}| \geq 0$, $|H_{\{2\}}| \geq 0$ et $|H_{\{1,2\}}| = |H| \geq 0$.
- H est négative si, et seulement si, $|H_{\{1\}}| \leq 0$, $|H_{\{2\}}| \leq 0$ et $|H_{\{1,2\}}| = |H| \geq 0$.

$$|H_{\{1\}}| = r$$

$$|H_{\{2\}}| = t$$

$$|H_{\{1,2\}}| = rt - s^2$$

Exemple 1

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1; x_2) & \longmapsto & 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2^2 - 2x_2 + 1 \end{array} \right.$$

Pour tout $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$, $Hf(x_1; x_2) = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

$$|H_1| = 10 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 10 \times 4 - (-6) \times (-6) = 4 > 0.$$

Par conséquent, pour tout $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$, $Hf(x_1; x_2)$ est définie positive donc f est strictement convexe.

Exemple 2

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1; x_2) & \longmapsto & x_1^4 + x_2^4 \end{array} \right.$$

$$\text{Pour tout } (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2, \nabla g(x_1; x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 \\ 4x_2^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Hg(x_1; x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}.$$

$$|H_1| = 12x_1^2 \geq 0$$

$$|H_2| = 12x_2^2 \geq 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 12x_1^2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{vmatrix} = 144 x_1^2 x_2^2 \geq 0.$$

Par conséquent, pour tout $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$, $Hg(x_1; x_2)$ est positive donc g est convexe.

Proposition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et soit $(a; b) \in D$. Si $\nabla f(a; b) = 0$, alors f admet un minimum (global) en $(a; b)$

Proposition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave et soit $(a; b) \in D$. Si $\nabla f(a; b) = 0$, alors f admet un maximum (global) en $(a; b)$

Conséquence : la fonction g admet un minimum global en $(0; 0)$.

Exemple 3

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \\ (x_1; x_2) & \longmapsto \end{cases} \mathbb{R} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_1^4 x_2^2 - x_1^2 x_2^4$$

Pour tout $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla h(x_1; x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_1^3 x_2^2 - 2x_1 x_2^4 \\ 2x_2 + 2x_1^4 x_2 - 4x_1^2 x_2^3 \end{pmatrix}$

$$Hh(x_1; x_2) = \begin{pmatrix} 2 + 12x_1^2 x_2^2 - 2x_2^4 & 8x_1^3 x_2 - 8x_1 x_2^3 \\ 8x_1^3 x_2 - 8x_1 x_2^3 & 2 + 2x_1^4 - 12x_1^2 x_2^2 \end{pmatrix}.$$

- En $(0; 0)$, $\nabla h(0; 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus, $Hh(0; 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc h admet un minimum local en $(0; 0)$.
- En $(1; 1)$, $Hh(1; 1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

La fonction h n'est ni convexe, ni concave sur $\mathbb{R}^2$.

