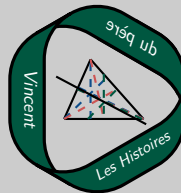


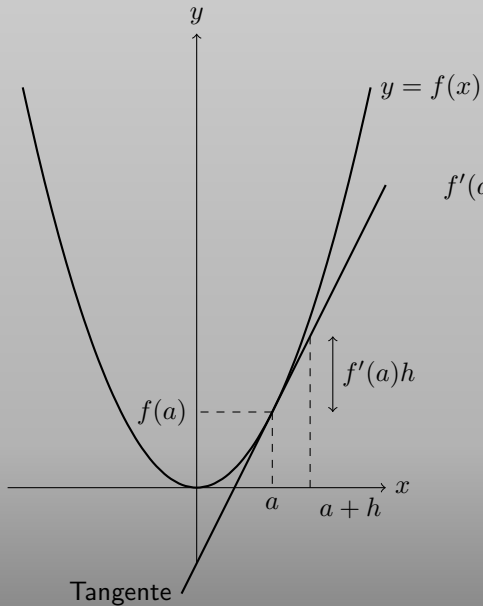
Différentielle

Yannick VINCENT

yannick.vincent@umontpellier.fr

Université de Montpellier





$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f(a+h) - f(a) \approx hf'(a)$$

$$f(a+h) - f(a) \approx hf'(a)$$

Ainsi, pour une variation Δx petite :

$$\Delta f \simeq f'(a)\Delta x.$$

$$f(a+h) - f(a) \approx hf'(a)$$

Ainsi, pour une variation Δx petite :

$$\Delta f \simeq f'(a)\Delta x.$$

Cela signifie donc que Δf est une fonction linéaire de Δx (encore une fois si Δx est petit).

Définition – Différentielle

Soit f une fonction dérivable en $a \in I$. On appelle différentielle de f en a , notée df_a , l'application :

$$df_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & f'(a)h \end{cases}$$

$$f(a+h) - f(a) \approx hf'(a)$$

Ainsi, pour une variation Δx petite :

$$\Delta f \simeq f'(a)\Delta x.$$

Cela signifie donc que Δf est une fonction linéaire de Δx (encore une fois si Δx est petit).

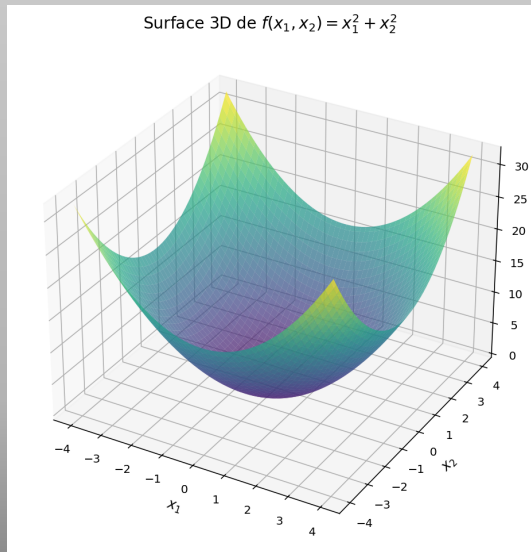
Définition – Différentielle

Soit f une fonction dérivable en $a \in I$. On appelle différentielle de f en a , notée df_a , l'application :

$$df_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & f'(a)h \end{cases}$$

$$df_a(h) = f'(a)h \qquad df_a(dx) = f'(a)dx \qquad df_a = f'(a)dx \qquad df = f'dx$$

On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$



On a $f(1, 3) = 1^2 + 3^2 = 10$.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

Question : comment varie $f(x_1, x_2)$ lorsque x_1 et x_2 subissent une petite variation autour du point $(1, 3)$?

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

Question : comment varie $f(x_1, x_2)$ lorsque x_1 et x_2 subissent une petite variation autour du point $(1, 3)$?

On fixe $x_2 = 3$. On considère alors la fonction $\Theta_1 : x_1 \in \mathbb{R} \longmapsto f(x_1, 3) = x_1^2 + 9$.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

Question : comment varie $f(x_1, x_2)$ lorsque x_1 et x_2 subissent une petite variation autour du point $(1, 3)$?

On fixe $x_2 = 3$. On considère alors la fonction $\Theta_1 : x_1 \in \mathbb{R} \longmapsto f(x_1, 3) = x_1^2 + 9$.

Cette fonction s'appelle la **1^{re} application partielle** de f au point $(1, 3)$.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

Question : comment varie $f(x_1, x_2)$ lorsque x_1 et x_2 subissent une petite variation autour du point $(1, 3)$?

On fixe $x_2 = 3$. On considère alors la fonction $\Theta_1 : x_1 \in \mathbb{R} \longmapsto f(x_1, 3) = x_1^2 + 9$.

Cette fonction s'appelle la **1^{re} application partielle** de f au point $(1, 3)$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\Theta_1'(x) = 2x_1$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \end{array} \right.$$

Question : comment varie $f(x_1, x_2)$ lorsque x_1 et x_2 subissent une petite variation autour du point $(1, 3)$?

On fixe $x_2 = 3$. On considère alors la fonction $\Theta_1 : x_1 \in \mathbb{R} \longmapsto f(x_1, 3) = x_1^2 + 9$.

Cette fonction s'appelle la **1^{re} application partielle** de f au point $(1, 3)$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\Theta_1'(x) = 2x_1$.

Pour $x_1 = 1$, on obtient donc $\Theta_1'(1) = 2$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \end{array} \right.$$

Question : comment varie $f(x_1, x_2)$ lorsque x_1 et x_2 subissent une petite variation autour du point $(1, 3)$?

On fixe $x_2 = 3$. On considère alors la fonction $\Theta_1 : x_1 \in \mathbb{R} \longmapsto f(x_1, 3) = x_1^2 + 9$.

Cette fonction s'appelle la **1^{re} application partielle** de f au point $(1, 3)$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\Theta_1'(x) = 2x_1$.

Pour $x_1 = 1$, on obtient donc $\Theta_1'(1) = 2$.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

Question : comment varie $f(x_1, x_2)$ lorsque x_1 et x_2 subissent une petite variation autour du point $(1, 3)$?

On fixe $x_2 = 3$. On considère alors la fonction $\Theta_1 : x_1 \in \mathbb{R} \longmapsto f(x_1, 3) = x_1^2 + 9$.

Cette fonction s'appelle la **1^{re} application partielle** de f au point $(1, 3)$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\Theta_1'(x) = 2x_1$.

Pour $x_1 = 1$, on obtient donc $\Theta_1'(1) = 2$.

On dit que la dérivée partielle de f par rapport à x_1 au point $(1, 3)$ est égale à 2.

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \end{array} \right.$$

Question : comment varie $f(x_1, x_2)$ lorsque x_1 et x_2 subissent une petite variation autour du point $(1, 3)$?

On fixe $x_2 = 3$. On considère alors la fonction $\Theta_1 : x_1 \in \mathbb{R} \longmapsto f(x_1, 3) = x_1^2 + 9$.

Cette fonction s'appelle la **1^{re} application partielle** de f au point $(1, 3)$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\Theta_1'(x) = 2x_1$.

Pour $x_1 = 1$, on obtient donc $\Theta_1'(1) = 2$.

On dit que la dérivée partielle de f par rapport à x_1 au point $(1, 3)$ est égale à 2. On note :

$$f_1(1, 3) = 2.$$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

Question : comment varie $f(x_1, x_2)$ lorsque x_1 et x_2 subissent une petite variation autour du point $(1, 3)$?

On fixe $x_2 = 3$. On considère alors la fonction $\Theta_1 : x_1 \in \mathbb{R} \longmapsto f(x_1, 3) = x_1^2 + 9$.

Cette fonction s'appelle la **1^{re} application partielle** de f au point $(1, 3)$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\Theta_1'(x) = 2x_1$.

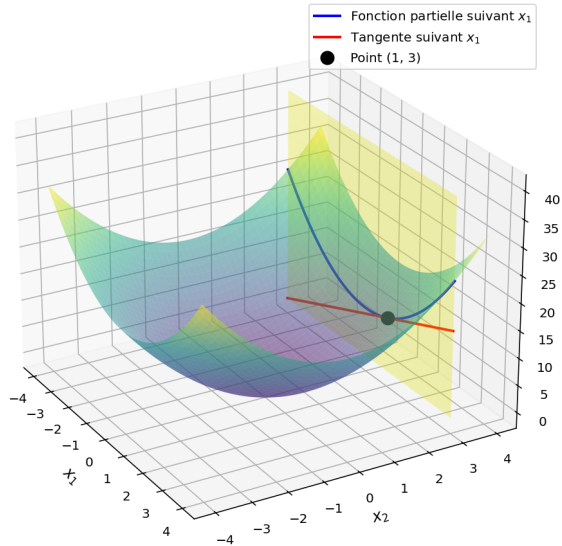
Pour $x_1 = 1$, on obtient donc $\Theta_1'(1) = 2$.

On dit que la dérivée partielle de f par rapport à x_1 au point $(1, 3)$ est égale à 2. On note :

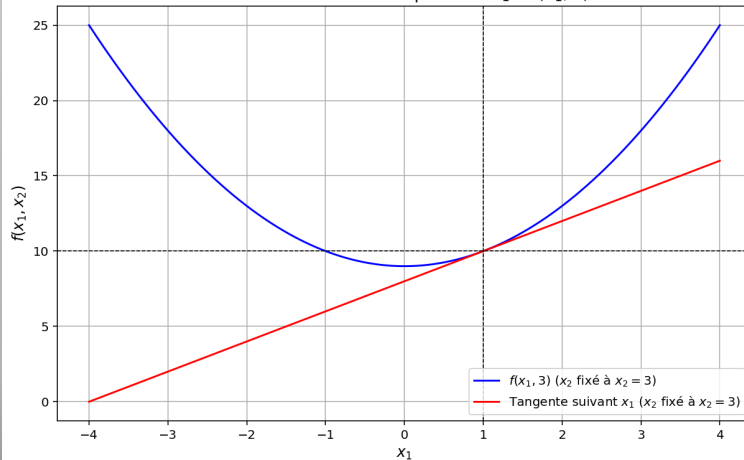
$$f_1(1, 3) = 2.$$

On note aussi $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 3) = 2$ ou encore $\partial_1 f(1, 3) = 2$.

Fonctions partielles et tangentes



Vue 2D de la fonction partielle $x_1 \mapsto f(x_1, 3)$



$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \end{array} \right.$$

Question : comment varie $f(x_1, x_2)$ lorsque x_1 et x_2 subissent une petite variation autour du point $(1, 3)$?

On fixe $x_2 = 3$. On considère alors la fonction $\Theta_1 : x_1 \in \mathbb{R} \longmapsto f(x_1, 3) = x_1^2 + 9$.

Cette fonction s'appelle la **1^{re} application partielle** de f au point $(1, 3)$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\Theta_1'(x) = 2x_1$.

Pour $x_1 = 1$, on obtient donc $\Theta_1'(1) = 2$.

On dit que la dérivée partielle de f par rapport à x_1 au point $(1, 3)$ est égale à 2. On note :

$$f_1(1, 3) = 2.$$

Autour du point $(1, 3)$, lorsque x_2 est fixé à 3, si x_1 subit une petite variation de h_1 , alors f subit une petite variation $df = 2h_1$.

De la même manière, on définit l'application partielle par rapport à x_2 au point $(1, 3)$ en posant, pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$, $\Theta_2(x_2) = f(1, x_2) = 1 + x_2^2$.

De la même manière, on définit l'application partielle par rapport à x_2 au point $(1, 3)$ en posant, pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$, $\Theta_2(x_2) = f(1, x_2) = 1 + x_2^2$.

Elle est dérivable et on a $\theta'_2(x_2) = 2x_2$ donc $\Theta'(3) = 6$.

De la même manière, on définit l'application partielle par rapport à x_2 au point $(1, 3)$ en posant, pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$, $\Theta_2(x_2) = f(1, x_2) = 1 + x_2^2$.

Elle est dérivable et on a $\theta'_2(x_2) = 2x_2$ donc $\Theta'(3) = 6$. On a ainsi

$$f_2(1, 3) = 6.$$

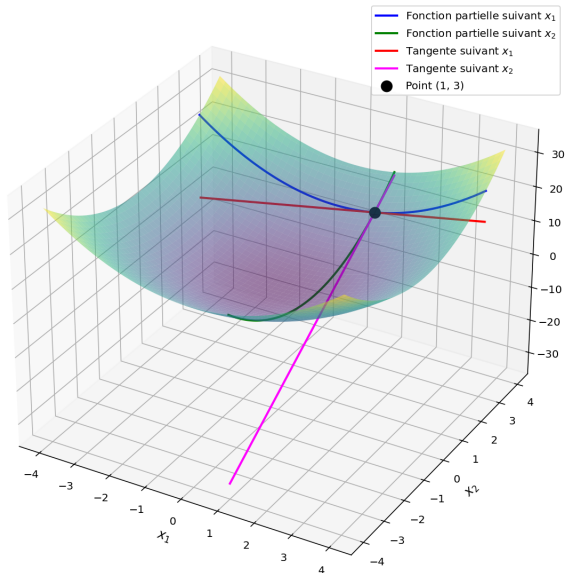
De la même manière, on définit l'application partielle par rapport à x_2 au point $(1, 3)$ en posant, pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$, $\Theta_2(x_2) = f(1, x_2) = 1 + x_2^2$.

Elle est dérivable et on a $\theta'_2(x_2) = 2x_2$ donc $\Theta'(3) = 6$. On a ainsi

$$f_2(1, 3) = 6.$$

Autour du point $(1, 3)$, si x_2 subit une petite variation de h_2 , alors f subit une petite variation $df = 6h_2$.

Fonctions partielles et tangentes



On se place toujours au point $(1, 3)$. Il paraît naturel de penser que si x_1 varie d'une petite quantité h_1 et que x_2 varie d'une petite quantité h_2 , f variera d'une quantité

$$df \approx 2h_1 + 6h_2.$$

On se place toujours au point $(1, 3)$. Il paraît naturel de penser que si x_1 varie d'une petite quantité h_1 et que x_2 varie d'une petite quantité h_2 , f variera d'une quantité

$$df \approx 2h_1 + 6h_2.$$

Ainsi, au voisinage de $(1, 3)$, on aura

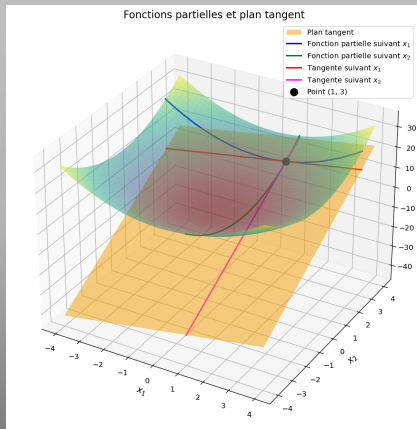
$$f(x_1, x_2) \approx 10 + 2(x_1 - 1) + 6(x_2 - 3).$$

On se place toujours au point $(1, 3)$. Il paraît naturel de penser que si x_1 varie d'une petite quantité h_1 et que x_2 varie d'une petite quantité h_2 , f variera d'une quantité

$$df \approx 2h_1 + 6h_2.$$

Ainsi, au voisinage de $(1, 3)$, on aura

$$f(x_1, x_2) \approx 10 + 2(x_1 - 1) + 6(x_2 - 3).$$



L'équation du plan tangent est $y = 10 + 2(x_1 - 1) + 6(x_2 - 3)$.

L'équation du plan tangent est $y = 10 + 2(x_1 - 1) + 6(x_2 - 3)$.

Pour les fonctions d'une variable : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est l'équation de la tangente au point a .

Pour les fonctions de deux variables :

$$y = f(a_1, a_2) + f_1(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f_2(a_1, a_2)(x_2 - a_2)$$

est l'équation du plan tangent au point (a_1, a_2) .

L'équation du plan tangent est $y = 10 + 2(x_1 - 1) + 6(x_2 - 3)$.

Pour les fonctions d'une variable : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est l'équation de la tangente au point a .

Pour les fonctions de deux variables :

$$y = f(a_1, a_2) + f_1(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f_2(a_1, a_2)(x_2 - a_2)$$

est l'équation du plan tangent au point (a_1, a_2) .

Pour $(x_1, x_2) \simeq (a_1, a_2)$,

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) + \underbrace{f_1(a_1, a_2)h_1 + f_2(a_1, a_2)h_2}_{df_{(a_1, a_2)}(h_1, h_2)}.$$

$$df_{(x_1, x_2)}(dx_1, dx_2) = f_1(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_1, x_2)dx_2$$

$$df_{(x_1, x_2)} = f_1(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_1, x_2)dx_2$$

$$df = f_1dx_1 + f_2dx_2$$

Définition – Dérivée partielle d'une fonction de deux variables

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(a_1, a_2) \in D$.

- La **dérivée partielle** de f par rapport à la 1^{re} variable au point $(a_1, a_2) \in D$, notée $f_1(a_1, a_2)$, est (si elle existe) la dérivée au point a_1 de la fonction d'une variable $\Theta_1 : x_1 \longmapsto f(x_1, a_2)$. Ainsi, par définition,

$$\begin{aligned} f_1(a_1, a_2) &= \Theta_1'(a_1) \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\Theta_1(a_1 + h_1) - \Theta_1(a_1)}{h_1} \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h_1}. \end{aligned}$$

- La **dérivée partielle** de f par rapport à la 2^e variable au point $(x_0, y_0) \in D$, notée $\partial_2 f(x_0, y_0)$, est (si elle existe) la dérivée au point y_0 de la fonction d'une variable $\Theta_{2, x_0} : y \longmapsto f(x_0, y)$. Ainsi, $f_2(a_1, a_2) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)}{h_2}$.

Définition – Gradient

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si les deux dérivées partielles en un point $(x_1, x_2) \in D$ existent, on appelle **gradient** de f en (x_1, x_2) le vecteur

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Définition – Fonctions dérivées partielles

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si les deux dérivées partielles (par rapport aux deux variables) existent en tout point $(x_1 ; x_2) \in D$, on définit les applications suivantes :

- la **fonction dérivée partielle par rapport à la 1^{re} variable** :

$$f_1 : (x_1, x_2) \in D \longmapsto f_1(x_1, x_2),$$

- la **fonction dérivée partielle par rapport à la 2^e variable** :

$$f_2 : (x_1, x_2) \in D \longmapsto f_2(x_1, x_2),$$

Définition – Fonctions dérivées partielles

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si les deux dérivées partielles (par rapport aux deux variables) existent en tout point $(x_1 ; x_2) \in D$, on définit les applications suivantes :

- la **fonction dérivée partielle par rapport à la 1^{re} variable** :

$$f_1 : (x_1, x_2) \in D \longmapsto f_1(x_1, x_2),$$

- la **fonction dérivée partielle par rapport à la 2^e variable** :

$$f_2 : (x_1, x_2) \in D \longmapsto f_2(x_1, x_2),$$

Définition

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables dont les dérivées partielles existent en tout point $(x_1 ; x_2) \in D$. Si les fonctions dérivées partielles de f par rapport aux deux variables sont continues sur D , on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto 3x_1^2x_2 - x_2^2e^{x_1} \end{cases}$$

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto 3x_1^2x_2 - x_2^2e^{x_1} \end{cases}$

- Calcul de $f_1(x_1, x_2)$

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto 3x_1^2x_2 - x_2^2e^{x_1} \end{cases}$

- **Calcul de $f_1(x_1, x_2)$**

Soit $x_2 \in \mathbb{R}$ fixé.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto 3x_1^2x_2 - x_2^2e^{x_1} \end{cases}$

- **Calcul de $f_1(x_1, x_2)$**

Soit $x_2 \in \mathbb{R}$ fixé.

Pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, on pose $\Theta_1(x_1) = 3x_1^2x_2 - x_2^2e^{x_1}$.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto 3x_1^2x_2 - x_2^2e^{x_1} \end{cases}$

- **Calcul de $f_1(x_1, x_2)$**

Soit $x_2 \in \mathbb{R}$ fixé.

Pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, on pose $\Theta_1(x_1) = 3x_1^2x_2 - x_2^2e^{x_1}$.

Ainsi, Θ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$,

$$\Theta'_1(x_1) = 6x_1x_2 - x_2^2e^{x_1}.$$

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto 3x_1^2x_2 - x_2^2e^{x_1} \end{cases}$

- **Calcul de $f_1(x_1, x_2)$**

Soit $x_2 \in \mathbb{R}$ fixé.

Pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, on pose $\Theta_1(x_1) = 3x_1^2x_2 - x_2^2e^{x_1}$.

Ainsi, Θ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$,

$$\Theta_1'(x_1) = 6x_1x_2 - x_2^2e^{x_1}.$$

Au final,

$$f_1(x_1, x_2) = \Theta_1'(x_1) = 6x_1x_2 - x_2^2e^{x_1}.$$

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto 3x_1^2x_2 - x_2^2e^{x_1} \end{cases}$

- **Calcul de $f_1(x_1, x_2)$**

Soit $x_2 \in \mathbb{R}$ fixé.

Pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, on pose $\Theta_1(x_1) = 3x_1^2x_2 - x_2^2e^{x_1}$.

Ainsi, Θ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$,

$$\Theta_1'(x_1) = 6x_1x_2 - x_2^2e^{x_1}.$$

Au final,

$$f_1(x_1, x_2) = \Theta_1'(x_1) = 6x_1x_2 - x_2^2e^{x_1}.$$

Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f_1(x_1, x_2) = 6x_1x_2 - x_2^2e^{x_1}$.

- **Calcul de $f_2(x_1, x_2)$**

Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f_2(x, y) = 3x_1^2 - 2x_2e^{x_1}$.

Définition – Différentielle

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de deux variables. Si F est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut définir la différentielle de f en $(x_1 ; x_2)$. Il s'agit de l'application notée $df_{(x_1, x_2)}$ et définie par :

$$df_{(x_1, x_2)} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2) & \longmapsto f_1(x_1, x_2)h_1 + f_2(x_1, x_2)h_2 \end{cases}$$

$$df_{(x_1, x_2)}(h_1, h_2) = f_1(x_1, x_2)h_1 + f_2(x_1, x_2)h_2$$

$$df_{(x_1, x_2)}(dx_1, dx_2) = f_1(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_1, x_2)dx_2$$

$$df_{(x_1, x_2)} = f_1(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_1, x_2)dx_2$$

$$df = f_1dx_1 + f_2dx_2$$

$f'(a)$	$f_1(a_1, a_2)$ et $f_2(a_1, a_2)$
$df_a : h \longmapsto f'(a)h$	$df_{(a_1, a_2)} : (h_1, h_2) \longmapsto f_1(a_1, a_2)h_1 + f_2(a_1, a_2)h_2$
$\Delta f \approx f'(a)\Delta x$	$\Delta f \approx f_1(a_1, a_2)\Delta x_1 + f_2(a_1, a_2)\Delta x_2$
Tangente	Plan tangent
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	$y = f(a_1, a_2) + f_1(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f_2(a_1, a_2)(x_2 - a_2)$