

Extrema de fonctions à plusieurs variables - exercices

Exercice 1.

Trouver les points stationnaires des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$, calculer la matrice Hessienne en ces points, et déterminer s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local ou d'un point selle.

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2$
2. $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 + 6x_2$
3. $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$

Exercice 2.

Trouver les points stationnaires des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$, calculer la matrice Hessienne en ces points, et déterminer s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local ou d'un point selle.

1. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2} - x_1 - x_2$
2. $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2$
3. $f(x_1, x_2) = e^{x_1x_2} - x_1 - x_2$

Remarque. Pour la dernière question, on ne cherchera pas à déterminer une valeur exacte des coordonnées du point stationnaire mais on montrera simplement qu'il en existe un unique avant de déterminer sa nature (maximum, minimum ou point selle).