

Extrema de fonctions à plusieurs variables - corrigé des exercices

Ce corrigé donne les résultats et les principales étapes intermédiaires des calculs. Il ne s'agit toutefois pas d'une rédaction type que l'on pourrait prendre comme modèle.

Exercice 1.

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2$

$f_1 = 2x_1 - 2, f_2 = 2x_2 - 4.$

Point stationnaire : $(1, 2).$

Hessienne : $Hf(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, |H| = 4 > 0$ et $|H_1| = f_{11} = 2 > 0.$

Conclusion : $Hf(1, 2)$ est définie positive et f admet donc un minimum local en $(1, 2).$

2. $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 + 6x_2$

$f_1 = -2x_1 + 2, f_2 = -2x_2 + 6.$

Point stationnaire : $(1, 3).$

Hessienne : $Hf(1, 3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, |H| = 4 > 0$ et $|H_1| = f_{11} = -2 < 0.$

Conclusion : $Hf(1, 2)$ est définie négative et f admet donc un maximum local en $(1, 2).$

3. $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$

$f_1 = 3x_1^2 - 3x_2, f_2 = 3x_2^2 - 3x_1.$

Points stationnaires : $(1, 1)$ et $(0, 0).$

Hessienne :

- En $(0, 0), Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$ Ainsi, $|Hf(0, 0)| = -9 < 0$ donc il s'agit d'un point selle (ni un maximum, ni un minimum).
- En $(1, 1), Hf(1, 1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$ Cette matrice est définie positive donc f admet un minimum local en $(1, 1).$

Exercice 2.

1. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2} - x_1 - x_2$

$f_1 = e^{x_1} - 1, f_2 = e^{x_2} - 1.$

Point stationnaire : $(0, 0).$

Hessienne : $Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

$|H| = 1 > 0$ et $f_{11} = 1 > 0.$

Conclusion : Minimum local en $(0, 0).$

2. $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2$

$f_1 = 4x_1^3 - 4x_2, f_2 = 4x_2^3 - 4x_1.$

Points stationnaires : $(0, 0), (1, 1), (-1, -1).$

- En $(0, 0) : H = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \det(H) = -16 < 0.$

Conclusion : f admet un point selle en $(0, 0).$

- En $(1, 1) : H = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}, \det(H) = 128 > 0$ et $f_{11} = 12 > 0.$

Conclusion : f admet un minimum local en $(1, 1).$

- En $(-1, -1),$ même chose qu'en $(1, 1) : \text{minimum local}.$

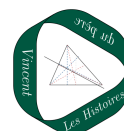
3. $f(x_1, x_2) = e^{x_1x_2} - x_1 - x_2$

$f_1 = x_2e^{x_1x_2} - 1, f_2 = x_1e^{x_1x_2} - 1.$

Soit (x_1, x_2) un point stationnaire de $f.$ On a nécessairement

$$x_2e^{x_1x_2} = x_1e^{x_1x_2}$$

et donc $x_1 = x_2.$ Par suite, on a $x_1e^{x_1^2} = 1.$ Comme l'équation $xe^{x^2} = 1$ admet une unique solution réelle (pour le justifier, il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto xe^{x^2}$ est bijective de



$\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), un point stationnaire de f est nécessairement de la forme : (a, a) où a est l'unique solution de $xe^{x^2} = 1$.

Réciproquement, il est clair que ce point est bien un point stationnaire.

Remarque. Avec une calculatrice, on peut déterminer une valeur approchée de a : $a \approx 0.65$.

On calcule ensuite la Hessienne en (a, a) : $Hf(a, a) = \begin{bmatrix} a^2 e^{a^2} & e^{a^2} (1 + a^2) \\ e^{a^2} (1 + a^2) & a^2 e^{a^2} \end{bmatrix}$.

Comme $ae^{a^2} = 1$, on a, après simplifications : $Hf(a, a) = \begin{bmatrix} a & \frac{1+a^2}{a} \\ \frac{1+a^2}{a} & a \end{bmatrix}$ et ainsi :

$$|Hf(a, a)| = a^2 - \left(\frac{1+a^2}{a} \right)^2 = \frac{a^4 - (1 + 2a^2 + a^4)}{a^2} = \frac{-1 - 2a^2}{a^2} < 0.$$

Conclusion : la fonction admet un point selle en (a, a) .