

Variations - corrigé des exercices

Exercice 1.

1. $u_{n+1} = 2u_n$
Solution générale : $u_n = \lambda \cdot 2^n$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $u_{n+1} - u_n = 4$
Solution générale : $u_n = 4n + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $u_{n+1} = 2u_n - 7$
Solution générale : $u_n = 7 + \lambda \cdot 2^n$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $3u_{n+1} - u_n = 1$
Solution générale : $u_n = \frac{1}{2} + \lambda \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$
Équation caractéristique : $r^2 - r - 2 = 0$ (racines 2 et -1).
Solution générale : $u_n = \lambda \cdot 2^n + \mu \cdot (-1)^n$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
6. $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$
Équation caractéristique : $r^2 + r - 2 = 0$ (racines 1 et -2).
Solution générale : $u_n = \lambda \cdot 1^n + \mu \cdot (-2)^n = \lambda + \mu \cdot (-2)^n$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
7. $4u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$
Équation caractéristique : $4r^2 - 4r + 1 = 0$ (racine double $r = \frac{1}{2}$).
Solution générale : $u_n = (\lambda + \mu n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

Solution : $u_n = \lambda \cdot 3^n - \frac{5}{2}$, avec $\lambda = \frac{7}{2}$ (obtenu via $u_0 = 1$).

Expression finale :

$$u_n = \frac{7}{2} \cdot 3^n - \frac{5}{2}$$

Exercice 3.

$u_n = \frac{1}{3} + \lambda \cdot 4^n$, avec $\lambda = -\frac{1}{3 \cdot 4^0}$ (obtenu via $u_1 = 0$).

Expression finale :

$$u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 4^{n-1}$$

Exercice 4.

Équation caractéristique : $r^2 - r - 1 = 0$ (racines $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$).

Solution générale :

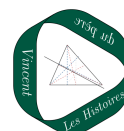
$$u_n = \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Avec les conditions initiales $u_0 = 2$ et $u_1 = 2$, on trouve :

$$\lambda = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \mu = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Expression finale :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$



Exercice 5.

Équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$ (racine double $r = 1$).

Solution générale : $u_n = \lambda + \mu n$.

Avec les conditions initiales $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$, on trouve $\lambda = 2$ et $\mu = -1$.

Expression finale :

$$u_n = 2 - n$$

Exercice 6.

1. Relation de récurrence : $u_{n+1} = 1.04u_n + 200$.

2. Solution générale : $u_n = \lambda \cdot (1.04)^n - 5000$, avec $\lambda = 6000$ (obtenu via $u_0 = 1000$).

Expression finale :

$$u_n = 6000 \cdot (1.04)^n - 5000$$

3. Résolution de $6000 \cdot (1.04)^n - 5000 > 3000$:

$$(1.04)^n > \frac{4}{3} \Rightarrow n > \frac{\ln(\frac{4}{3})}{\ln(1.04)} \approx 7.58.$$

Réponse : À partir de $n = 8$, soit l'année **2034**.