

Suites numériques

Yannick VINCENT

yannick.vincent@umontpellier.fr

Université de Montpellier



I. Suites arithmétiques et suites géométriques

II. Suites arithmético-géométriques

II. Suites d'ordre 2

I. Suites arithmétiques et suites géométriques

Suites arithmétiques

- **Expression par récurrence** : $u_{n+1} = u_n + r$
- **Expression explicite** : $u_n = u_0 + nr$
- **Somme des termes** : $\text{nbre termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

I. Suites arithmétiques et suites géométriques

Suites arithmétiques

- **Expression par récurrence** : $u_{n+1} = u_n + r$
- **Expression explicite** : $u_n = u_0 + nr$
- **Somme des termes** : $\text{nbre termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

À retenir : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$

I. Suites arithmétiques et suites géométriques

Suites géométriques

- **Expression par récurrence** : $u_{n+1} = qu_n$
- **Expression explicite** : $u_n = u_0q^n$
- **Somme des termes** : premier terme $\times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbre termes}}}{1 - \text{raison}}$.

II. Suites arithmético-géométriques

Méthode – Expression des suites arithmético-géométriques

Pour déterminer les suites vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b,$$

- On commence par déterminer une suite constante vérifiant la relation.
- On détermine les suites vérifiant $u_{n+1} = au_n$
- Les solutions correspondent à la somme des deux.

II. Suites arithmético-géométriques

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 3$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

II. Suites arithmético-géométriques

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 3$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

- Soit $c \in \mathbb{R}$. La suite définie par $u_n = c$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) vérifie la relation de récurrence si, et seulement si,

$$c = 4c + 3 \iff c = -1.$$

II. Suites arithmético-géométriques

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 3$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

- Soit $c \in \mathbb{R}$. La suite définie par $u_n = c$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) vérifie la relation de récurrence si, et seulement si,

$$c = 4c + 3 \iff c = -1.$$

- Les suites vérifiant la relation $u_{n+1} = 4u_n$ sont les suites de la forme $u_n = \lambda 4^n$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

II. Suites arithmético-géométriques

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 3$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

- Soit $c \in \mathbb{R}$. La suite définie par $u_n = c$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) vérifie la relation de récurrence si, et seulement si,

$$c = 4c + 3 \iff c = -1.$$

- Les suites vérifiant la relation $u_{n+1} = 4u_n$ sont les suites de la forme $u_n = \lambda 4^n$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).
- On en déduit que les suites vérifiant la relation $u_{n+1} = 4u_n + 3$ sont les suites de la forme $u_n = \lambda 4^n - 1$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

II. Suites arithmético-géométriques

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 3$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

- Soit $c \in \mathbb{R}$. La suite définie par $u_n = c$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) vérifie la relation de récurrence si, et seulement si,

$$c = 4c + 3 \iff c = -1.$$

- Les suites vérifiant la relation $u_{n+1} = 4u_n$ sont les suites de la forme $u_n = \lambda 4^n$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).
- On en déduit que les suites vérifiant la relation $u_{n+1} = 4u_n + 3$ sont les suites de la forme $u_n = \lambda 4^n - 1$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).
Enfin, comme $u_0 = 1$, on a :

$$1 = \lambda 4^0 - 1 \iff 1 = \lambda - 1 \iff \lambda = 2.$$

II. Suites arithmético-géométriques

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 3$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

- Soit $c \in \mathbb{R}$. La suite définie par $u_n = c$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) vérifie la relation de récurrence si, et seulement si,

$$c = 4c + 3 \iff c = -1.$$

- Les suites vérifiant la relation $u_{n+1} = 4u_n$ sont les suites de la forme $u_n = \lambda 4^n$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).
- On en déduit que les suites vérifiant la relation $u_{n+1} = 4u_n + 3$ sont les suites de la forme $u_n = \lambda 4^n - 1$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).
Enfin, comme $u_0 = 1$, on a :

$$1 = \lambda 4^0 - 1 \iff 1 = \lambda - 1 \iff \lambda = 2.$$

Au final, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 \times 4^n - 1.$$

II. Suites d'ordre 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Suites d'ordre 2

- Si l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 , alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique solution réelle r_0 , alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n.$$

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

On résout l'équation $x^2 = 3x - 1$

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

On résout l'équation $x^2 = 3x - 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$.
 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 = 5$.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

On résout l'équation $x^2 = 3x - 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 = 5.$$

L'équation admet donc deux solutions réelles : $r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

On résout l'équation $x^2 = 3x - 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 = 5.$$

L'équation admet donc deux solutions réelles : $r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

On résout l'équation $x^2 = 3x - 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 = 5.$$

L'équation admet donc deux solutions réelles : $r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

De plus, comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases}$$

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

On résout l'équation $x^2 = 3x - 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 = 5.$$

L'équation admet donc deux solutions réelles : $r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

De plus, comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda r_1 - \lambda r_2 = 1 \end{cases}$$

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

On résout l'équation $x^2 = 3x - 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 = 5.$$

L'équation admet donc deux solutions réelles : $r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

De plus, comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda r_1 - \lambda r_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda = \frac{1}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

On résout l'équation $x^2 = 3x - 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 = 5.$$

L'équation admet donc deux solutions réelles : $r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

De plus, comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda r_1 - \lambda r_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda = \frac{1}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

On a donc $\lambda = \sqrt{5}$ et $\mu = -\sqrt{5}$.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

On résout l'équation $x^2 = 3x - 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 = 5.$$

L'équation admet donc deux solutions réelles : $r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

De plus, comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda r_1 - \lambda r_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda = \frac{1}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

On a donc $\lambda = \sqrt{5}$ et $\mu = -\sqrt{5}$. Au final,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{5} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \sqrt{5} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

