

Limites - corrigé des exercices

Ce corrigé donne les résultats et les principales étapes intermédiaires des calculs. Il ne s'agit toutefois pas d'une rédaction type que l'on pourrait prendre comme modèle.

Exercice 1.

1. $\frac{3x^3-2x+1}{5x^3+4} = \frac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{4}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{5}.$
2. On pose $y = -x^2 + 1$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -\infty$ et $e^y \rightarrow 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1} = 0$.
3. Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.
4. $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-2} = \frac{5}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$

Exercice 2.

1. $\frac{x^4 + \ln(x)}{e^x} = \frac{x^4}{e^x} + \frac{\ln(x)}{e^x}.$
Par croissances comparées, chaque terme tend vers 0. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + \ln(x)}{e^x} = 0$.
2. $\frac{e^x-1}{x}$ est le taux d'accroissement de e^x en 0. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ (on pouvait également utiliser la règle de l'Hôpital).
3. Par la règle de l'Hôpital : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$.
4. $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$

Exercice 3.

1. $\frac{-2x^5+x^2}{4x^5-3} = \frac{-2+\frac{1}{x^3}}{4-\frac{3}{x^5}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}.$
2. Par croissances comparées, $\frac{(\ln(x))^2}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
3. Pour tout $x \neq 0$, $-|x| \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
4. Par la règle de l'Hôpital : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(2\sqrt{x})}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty.$

Exercice 4.

1. Pour $x \rightarrow +\infty$, $-2x^2$ domine au dénominateur et x domine au numérateur : $\frac{5x^{2/3}+x}{3x^{2/3}-2x^2} = \frac{x(1+5x^{-1/3})}{-2x^2(1-\frac{3}{2}x^{-4/3})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
2. Pour $x \rightarrow 0^+$, $x^{2/3}$ domine au numérateur et au dénominateur : $\frac{5x^{2/3}+x}{3x^{2/3}-2x^2} = \frac{5+x^{1/3}}{3-2x^{4/3}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{3}.$
3. $\frac{e^{2x}+x^3}{e^{2x}-1} = \frac{1+\frac{x^3}{e^{2x}}}{1-\frac{1}{e^{2x}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.
4. Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} = 0$.

