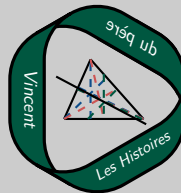


Calculs de limites

Yannick VINCENT

yannick.vincent@umontpellier.fr

Université de Montpellier



Calculs de limites

Les sept méthodes à connaître

- I. Factoriser par le terme dominant
- II. Utiliser un changement de variables
- III. Utiliser un encadrement
- IV. Multiplier par la quantité conjuguée
- V. Utiliser les croissances comparées
- VI. Utiliser un nombre dérivé
- VII. Règle de l'Hôpital

Proposition

Soient f et g deux fonctions et l et l' deux nombres réels.

Limite de f	Limite de g	Limite de $f + g$
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	FI*
$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite de f	Limite de g	Limite de $f \times g$
l	l'	$l \times l'$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$l \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	FI

Limite de f	Limite de g	Limite de $\frac{f}{g}$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$\pm\infty$	0
0	$l \neq 0$	0
$\pm\infty$	$l \neq 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI
0	0	FI

I. Factoriser par le terme dominant

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^6 + 7x^4 - 17x + 4}{x^6 + 1}$.

I. Factoriser par le terme dominant

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^6 + 7x^4 - 17x + 4}{x^6 + 1}$.

Solution :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{-3x^6 + 7x^4 - 17x + 4}{x^6 + 1} = \frac{x^6 \left(-3 + \frac{7}{x^2} - \frac{17}{x^5} + \frac{4}{x^6} \right)}{x^6 \left(1 + \frac{1}{x^6} \right)} = \frac{-3 + \frac{7}{x^2} - \frac{17}{x^5} + \frac{4}{x^6}}{1 + \frac{1}{x^6}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -3$$

I. Factoriser par le terme dominant

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^6 + 7x^4 - 17x + 4}{x^6 + 1}$.

Solution :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{-3x^6 + 7x^4 - 17x + 4}{x^6 + 1} = \frac{x^6 \left(-3 + \frac{7}{x^2} - \frac{17}{x^5} + \frac{4}{x^6} \right)}{x^6 \left(1 + \frac{1}{x^6} \right)} = \frac{-3 + \frac{7}{x^2} - \frac{17}{x^5} + \frac{4}{x^6}}{1 + \frac{1}{x^6}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -3$$

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^6 + 2x}$.

I. Factoriser par le terme dominant

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^6 + 7x^4 - 17x + 4}{x^6 + 1}$.

Solution :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{-3x^6 + 7x^4 - 17x + 4}{x^6 + 1} = \frac{x^6 \left(-3 + \frac{7}{x^2} - \frac{17}{x^5} + \frac{4}{x^6} \right)}{x^6 \left(1 + \frac{1}{x^6} \right)} = \frac{-3 + \frac{7}{x^2} - \frac{17}{x^5} + \frac{4}{x^6}}{1 + \frac{1}{x^6}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -3$$

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^6 + 2x}$.

Solution :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{x^2 + 3x}{x^6 + 2x} = \frac{x(3 + x)}{x(2 + x^5)} = \frac{3 + x}{2 + x^5} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}$$

II. Utiliser un changement de variables

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-5}$.

II. Utiliser un changement de variables

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-5}$.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = x^2 - 5$.

II. Utiliser un changement de variables

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-5}$.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = x^2 - 5$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, y tend vers $+\infty$.

II. Utiliser un changement de variables

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-5}$.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = x^2 - 5$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, y tend vers $+\infty$.

Ainsi, $e^{x^2-5} = e^y \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

III. Utiliser un encadrement

Théorème des gendarmes

Soient f, g, h trois fonctions et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Supposons que pour x proche de x_0 , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$.

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

III. Utiliser un encadrement

Théorème des gendarmes

Soient f, g, h trois fonctions et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Supposons que pour x proche de x_0 , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l.$$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$.

III. Utiliser un encadrement

Théorème des gendarmes

Soient f, g, h trois fonctions et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Supposons que pour x proche de x_0 , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l.$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l.$$

Exemple :

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}.$$

$$\text{Solution : Pour tout } x > 0 : -1 \leq \cos(x) \leq 1, \quad \text{donc } -\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

III. Utiliser un encadrement

Théorème des gendarmes

Soient f, g, h trois fonctions et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Supposons que pour x proche de x_0 , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l.$$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$.

Solution : Pour tout $x > 0$: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Comme $\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, on en déduit, d'après le théorème

des gendarmes, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$

IV. Multiplier par la quantité conjuguée

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 2}$.

IV. Multiplier par la quantité conjuguée

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 2}$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 2} = \frac{(\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 2})(\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 2})}{\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 2}}$$

IV. Multiplier par la quantité conjuguée

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 2}$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 2} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 2})(\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 2})}{\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 2}}\end{aligned}$$

IV. Multiplier par la quantité conjuguée

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 2}$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 2} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 2})(\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 2})}{\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

V. Utiliser les croissances comparées

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{kx} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^k}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n (\ln(x))^k = 0$

V. Utiliser les croissances comparées

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{kx} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^k}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n (\ln(x))^k = 0$

Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 1}{e^{2x} x^2 + 12x}$

V. Utiliser les croissances comparées

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{kx} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^k}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n (\ln(x))^k = 0$

Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 1}{e^{2x} x^2 + 12x}$

Solution : Pour tout $x > 0$,

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 e^{2x} - 12x e^x} = \frac{x^4}{x^2 e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)} = \frac{x^2}{e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)}$$

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 e^{2x} - 12x e^x} = \frac{x^4}{x^2 e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)} = \frac{x^2}{e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)}$$

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 e^{2x} - 12x e^x} = \frac{x^4}{x^2 e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)} = \frac{x^2}{e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)}$$

Or, par croissance comparée, $\frac{e^{2x}}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$,

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 e^{2x} - 12x e^x} = \frac{x^4}{x^2 e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)} = \frac{x^2}{e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)}$$

Or, par croissance comparée, $\frac{e^{2x}}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\frac{x^2}{e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 e^{2x} - 12x e^x} = \frac{x^4}{x^2 e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)} = \frac{x^2}{e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)}$$

Or, par croissance comparée, $\frac{e^{2x}}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\frac{x^2}{e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

De plus,

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1,$$

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 e^{2x} - 12x e^x} = \frac{x^4}{x^2 e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)} = \frac{x^2}{e^{2x}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)}$$

Or, par croissance comparée, $\frac{e^{2x}}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\frac{x^2}{e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

De plus,

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{12}{x} e^{-x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1,$$

donc

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 e^{2x} - 12x e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

VI. Utiliser un nombre dérivé

Définition – Nombre dérivé

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe, ou de manière équivalente, si $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ existe. Dans le cas échéant, on note :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

VI. Utiliser un nombre dérivé

Définition – Nombre dérivé

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe, ou de manière équivalente, si $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ existe. Dans le cas échéant, on note :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

VI. Utiliser un nombre dérivé

Définition – Nombre dérivé

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe, ou de manière équivalente, si $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ existe. Dans le cas échéant, on note :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Solution : On note f la fonction exponentielle.

VI. Utiliser un nombre dérivé

Définition – Nombre dérivé

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe, ou de manière équivalente, si $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ existe. Dans le cas échéant, on note :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Solution : On note f la fonction exponentielle.

Pour tout $x \neq 0$,
$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

VI. Utiliser un nombre dérivé

Définition – Nombre dérivé

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe, ou de manière équivalente, si $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ existe. Dans le cas échéant, on note :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Solution : On note f la fonction exponentielle.

Pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0) = e^0 = 1.$$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$).

VII. Règle de l'Hôpital

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $a \in I$. Soient deux fonctions f et g définies sur I et telles que $\lim_a f = \lim_a g = 0$ et $g'(a) \neq 0$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Remarque :

- On peut remplacer l'hypothèse $\lim_a f = \lim_a g = 0$ par $\lim_a f = \lim_a g = +\infty$ et le résultat reste vrai.
- La règle reste également vraie pour des limites en $+\infty$ ou en $-\infty$ à condition, là aussi que la limite de $g'(x)$ ne soit pas 0.

Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$.

Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$.

Solution : Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$.
On est bien dans le cadre des hypothèses de la règle de l'Hôpital.

Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$.

Solution : Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$.
On est bien dans le cadre des hypothèses de la règle de l'Hôpital.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}$

Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$.

Solution : Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$.
On est bien dans le cadre des hypothèses de la règle de l'Hôpital.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2}$

Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$.

Solution : Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$.
On est bien dans le cadre des hypothèses de la règle de l'Hôpital.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$.