

Fonctions réciproques - exercices

Exercice 1.

Montrer que chacune des fonctions suivantes est une bijection et déterminer sa réciproque.

1. $f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{-5x+3}{2} \end{cases}$
2. $g: \begin{cases}]-1; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 5\ln(x+1) - 3 \end{cases}$
3. $h: \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow [1; +\infty[\\ x & \longmapsto x^2 + 1 \end{cases}$

Exercice 2.

Le coût de production d'une entreprise c est une fonction de la quantité produite q . Plus précisément, on a

$$c = C(q) = 2q^2 + 5q + 100.$$

1. La fonction $C: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ est-elle bijective ?
2. Si l'on se restreint à l'intervalle $I = [0; +\infty[$, montrer que la fonction $C: I \longrightarrow \mathbb{C}(I)$ est alors bijective et déterminer l'expression sa fonction réciproque.

Exercice 3.

Une fonction de production est donnée par :

$$Y = h(L) = L^3 + 2L + 5$$

où $L \geq 0$ représente le facteur travail et Y la quantité produite.

1. Montrer que la fonction $h: [0; +\infty[\longrightarrow h([0; +\infty[)$ est bijective puis déterminer $h^{-1}([0; +\infty[)$.
2. Justifier que h^{-1} est dérivable sur $h([0; +\infty[)$.
3. Avec la calculatrice, déterminer une valeur approchée de $(h^{-1})'(7)$ à 10^{-2} près. Interpréter ensuite le sens économique de cette valeur.

Exercice 4. Fonction arcsin

Soit $f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1; 1]$ définie par $f(x) = \sin(x)$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} puis calculer l'expression de $(f^{-1})'$.
3. En déduire le tableau de variations et le tableau de signe de $f^{(-1)}$

Remarque : on peut définir, de la même manière, les fonctions arccos et arctan comme étant les fonctions réciproques des fonctions cos et tan définies respectivement sur $[0; \pi]$ et sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 5. Fonction de Lambert

On considère la fonction $f: [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^x.$$

1. Montrer que la fonction f est bijective. Dans la suite de l'exercice, on notera $W = f^{-1}$. La fonction W est appelée **fonction de Lambert**.
2. (a) Montrer que pour tout $y \in [0; +\infty[$,

$$W'(y) = \frac{1}{(1+W(y))e^{W(y)}}.$$

- (b) En déduire que pour tout $y \in]0; +\infty[$,

$$W'(y) = \frac{W(y)}{y(1+W(y))}.$$

