

Fonctions réciproques - corrigé des exercices

Exercice 1.

On peut justifier *a priori* le fait que chacune des fonctions est bijective par le fait qu'elles sont strictement monotones et continues. Ce qui suit suffit néanmoins à montrer qu'elles sont bijectives et à déterminer leur fonction réciproque, en même temps.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{-5x + 3}{2} \\ &\iff 2y = -5x + 3 \\ &\iff 5x = 3 - 2y \\ &\iff x = \frac{3 - 2y}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien bijective et, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \frac{3 - 2y}{5}$.

2. Soit $x \in]-1; +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = g(x) &\iff y = 5 \ln(x + 1) - 3 \\ &\iff \ln(x + 1) = \frac{y + 3}{5} \\ &\iff x + 1 = e^{\frac{y+3}{5}} \\ &\iff x = e^{\frac{y+3}{5}} - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, g est bien bijective et, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g^{-1}(y) = e^{\frac{y+3}{5}} - 1$.

3. Soit $x \in [0; +\infty[$ et $y \in [1; +\infty[$.

$$\begin{aligned} y = h(x) &\iff y = x^2 + 1 \\ &\iff x^2 = y - 1 \\ &\iff \sqrt{x^2} = \sqrt{y - 1} \\ &\iff x = \sqrt{y - 1} \quad \text{car } x \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, h est bien bijective et, pour tout $y \in [0; +\infty[$, $h^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$.

Exercice 2.

- La fonction C est un polynôme du second degré. Elle n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas monotone (elle admet un minimum en $q = -\frac{5}{4}$).
- Sur $I = [0; +\infty[$, la dérivée $C'(q) = 4q + 5$ est positive (car $q \geq 0$), donc C est strictement croissante sur I . Comme C est continue, elle est bijective de I vers $C(I) = [100; +\infty[$.
Pour trouver la réciproque C^{-1} , résolvons $y = 2q^2 + 5q + 100$ pour $q \geq 0$:

$$2q^2 + 5q + (100 - y) = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 8y - 775$. La solution positive est :

$$q = \frac{-5 + \sqrt{8y - 775}}{4}.$$

Donc, pour $y \geq 100$,

$$C^{-1}(y) = \frac{-5 + \sqrt{8y - 775}}{4}.$$

Exercice 3.

- La dérivée $h'(L) = 3L^2 + 2 > 0$ pour tout $L \geq 0$, donc h est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Comme h est continue, elle est bijective de $[0; +\infty[$ vers $h([0; +\infty[) = [5; +\infty[$.



2. Puisque h est dérivable sur $[0, +\infty[$, et que, pour tout $L \geq 0$, $h'(L) \neq 0$, la fonction h^{-1} est dérivable sur $[5, +\infty[$.
3. D'après la formule de dérivation des fonctions réciproques :

$$(h^{-1})'(Y) = \frac{1}{h'(L)} \quad \text{où } Y = h(L).$$

Pour $Y = 7$, résolvons $L^3 + 2L + 5 = 7$, soit $L^3 + 2L - 2 = 0$. Une solution approchée est $L \approx 0,77$.

Calculons $h'(0,77) = 3 \times (0,77)^2 + 2 \approx 3,78$.

Donc,

$$(h^{-1})'(7) \approx \frac{1}{3,78} \approx 0,26.$$

4. Pour une production $Y = 7$, une augmentation marginale de la production nécessite une augmentation du facteur travail L d'environ 0,26 par unité supplémentaire produite.

Exercice 4.

1. La fonction $\sin$ est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. D'après le théorème de la bijection, f est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1; 1]$
 2. f^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$ (car $f'(x) = \cos(x) \neq 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).
- D'après la formule de dérivation des fonctions réciproques :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\text{car } \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{1 - y^2}.$$

3. Puisque $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} > 0$ pour tout $y \in]-1, 1[$, la fonction f^{-1} est strictement croissante sur $] -1, 1[$.
- Par ailleurs, $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0$.

Exercice 5. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$. De plus, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = (1+x)e^x > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme f est continue, on peut appliquer le théorème de la bijection. On en conclut que f est bijective de $[0, +\infty[$ vers $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.

1. Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \neq 0$. Ainsi, $W = f^{-1}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$. De plus, d'après la formule de dérivation des fonctions réciproques :

$$W'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(W(y))} = \frac{1}{(1+W(y))e^{W(y)}}.$$

2. Pour tout $y \geq 0$, on a $y = f(W(y)) = W(y)e^{W(y)}$. On a ainsi, pour tout $y > 0$, $e^{W(y)} = \frac{y}{W(y)}$.
- Par conséquent, pour tout $y \geq 0$,

$$W'(y) = \frac{1}{(1+W(y)) \frac{y}{W(y)}} = \frac{W(y)}{y(1+W(y))}.$$