

Fonctions réciproques

Yannick VINCENT

yannick.vincent@umontpellier.fr

Université de Montpellier



I. Bijection et fonction réciproque

II. Bijection et continuité

III. Bijection et dérivabilité

I. Bijection et fonction réciproque

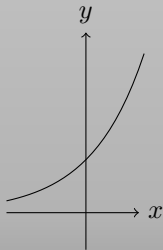
Définition – bijection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On dit que f est bijective si chaque élément de F a exactement un antécédent par f .

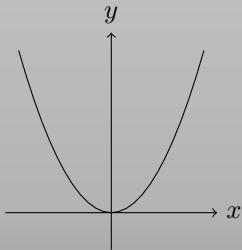
I. Bijection et fonction réciproque

Définition – bijection

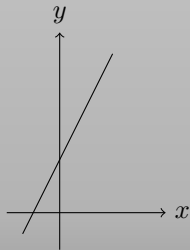
Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On dit que f est bijective si chaque élément de F a exactement un antécédent par f .



$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$$



$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

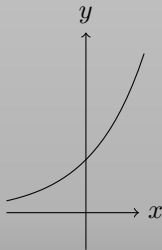


$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - 1 \end{cases}$$

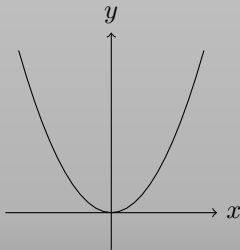
I. Bijection et fonction réciproque

Définition – bijection

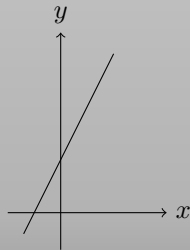
Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On dit que f est bijective si chaque élément de F a exactement un antécédent par f .



$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$$



$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$



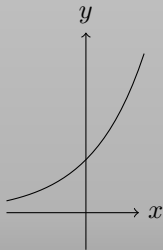
$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - 1 \end{cases}$$

Non bijective

I. Bijection et fonction réciproque

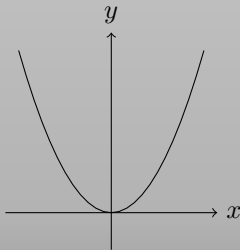
Définition – bijection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On dit que f est bijective si chaque élément de F a exactement un antécédent par f .



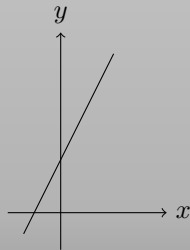
$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$$

Non bijective



$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

Non bijective

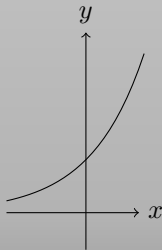


$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - 1 \end{cases}$$

I. Bijection et fonction réciproque

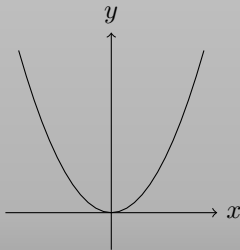
Définition – bijection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On dit que f est bijective si chaque élément de F a exactement un antécédent par f .



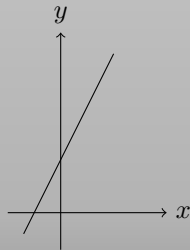
$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$$

Non bijective



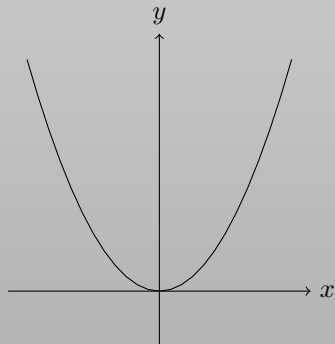
$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

Non bijective

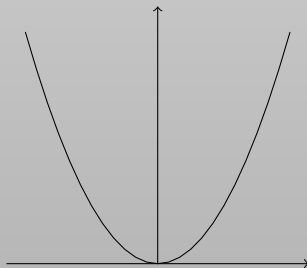


$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - 1 \end{cases}$$

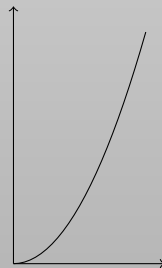
Bijective



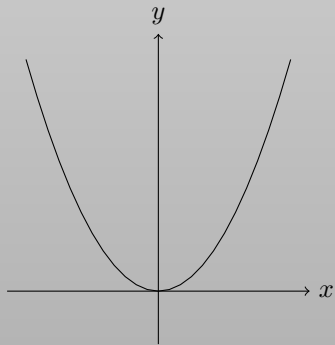
$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$



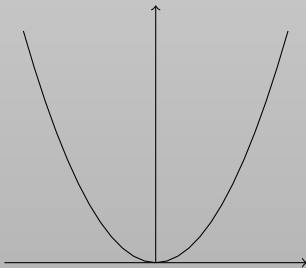
$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$



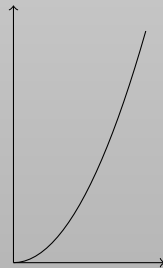
$$f_3 : \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$



$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

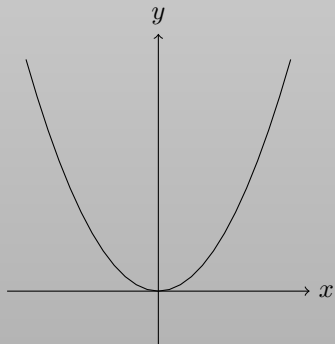


$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$



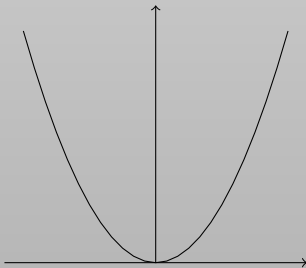
$$f_3 : \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

Non bijective



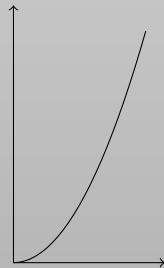
$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

Non bijective

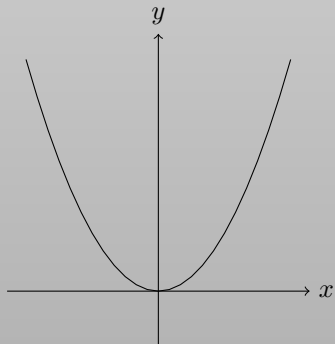


$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

Non bijective

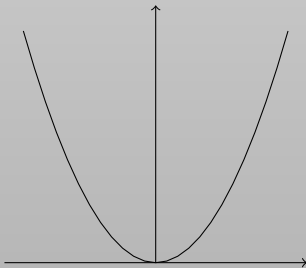


$$f_3 : \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$



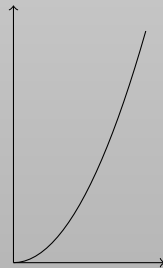
$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

Non bijective



$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

Non bijective



$$f_3 : \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

Bijjective

Théorème

Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est bijective si, et seulement si, il existe une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$\text{pour tout } x \in E, \quad g \circ f(x) = x \text{ et pour tout } y \in F, \quad f \circ g(y) = y.$$

De plus, la fonction g est unique. On l'appelle la bijection réciproque de f , et on la note f^{-1} .

Théorème

Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est bijective si, et seulement si, il existe une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$\text{pour tout } x \in E, \quad g \circ f(x) = x \text{ et pour tout } y \in F, \quad f \circ g(y) = y.$$

De plus, la fonction g est unique. On l'appelle la bijection réciproque de f , et on la note f^{-1} .

Exemple 1 :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

Théorème

Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est bijective si, et seulement si, il existe une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$\text{pour tout } x \in E, \quad g \circ f(x) = x \text{ et pour tout } y \in F, \quad f \circ g(y) = y.$$

De plus, la fonction g est unique. On l'appelle la bijection réciproque de f , et on la note f^{-1} .

Exemple 1 :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$
$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$

Théorème

Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est bijective si, et seulement si, il existe une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$\text{pour tout } x \in E, \quad g \circ f(x) = x \text{ et pour tout } y \in F, \quad f \circ g(y) = y.$$

De plus, la fonction g est unique. On l'appelle la bijection réciproque de f , et on la note f^{-1} .

Exemple 1 :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \longrightarrow & [0; +\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$

$$\text{Pour tout } x \in [0; +\infty[, \quad f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{x^2} = x,$$

$$\text{Pour tout } y \in [0; +\infty[, \quad f \circ f^{-1}(y) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

Exemple 2 :

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l}]0; +\infty[\\ e^x \end{array}$$

Exemple 2 :

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l}]0; +\infty[\\ e^x \end{array}$$

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ll}]0; +\infty[& \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \ln(x) \end{array}$$

Exemple 2 :

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l}]0; +\infty[\\ e^x \end{array}$$

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ll}]0; +\infty[& \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \ln(x) \end{array}$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f^{-1} \circ f(x) = \ln(e^x) = x,$$

$$\text{Pour tout } y \in]0; +\infty[, \quad f \circ f^{-1}(y) = e^{\ln(y)} = y.$$

Exercice : Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 2x - 1 \end{cases}$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice : Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 2x - 1 \end{cases}$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

Exercice : Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto 2x - 1 \end{cases} \mathbb{R}$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$y = f(x)$$

Exercice : Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 2x - 1 \end{cases}$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$y = f(x) \iff y = 2x - 1$$

Exercice : Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - 1 \end{cases}$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) & \iff y = 2x - 1 \\ & \iff y + 1 = 2x \end{aligned}$$

Exercice : Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 2x - 1 \end{cases}$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) & \iff y = 2x - 1 \\ & \iff y + 1 = 2x \\ & \iff x = \frac{y + 1}{2} \end{aligned}$$

Exercice : Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} 2x - 1$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) & \iff y = 2x - 1 \\ & \iff y + 1 = 2x \\ & \iff x = \frac{y + 1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, f est bijective et sa réciproque est la fonction $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ y & \longmapsto \end{cases} \frac{y + 1}{2}$.

Exercice : Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} 2x - 1$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = 2x - 1 \\ &\iff y + 1 = 2x \\ &\iff x = \frac{y + 1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, f est bijective et sa réciproque est la fonction $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ y & \longmapsto \end{cases} \frac{y + 1}{2}$.

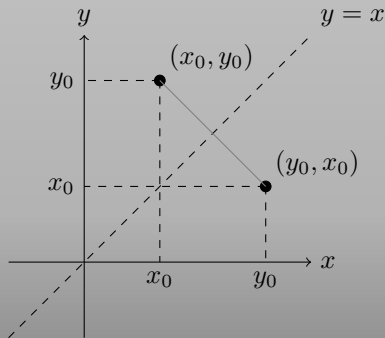
Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$.

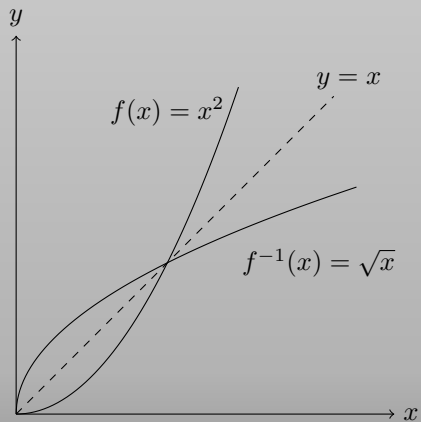
Proposition – Représentation graphique

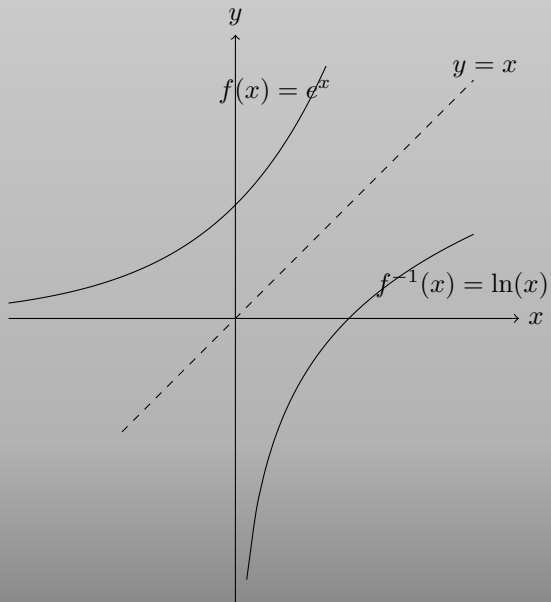
Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective. Alors la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Proposition – Représentation graphique

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective. Alors la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).







II. Bijection et continuité

Théorème – Valeurs intermédiaires

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $f(a) < 0 < f(b)$ alors il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

II. Bijection et continuité

Théorème – Valeurs intermédiaires

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si $f(a) < 0 < f(b)$ alors il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Corollaire

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante.
Si $f(a) < 0 < f(b)$ alors il existe un unique réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

II. Bijection et continuité

Théorème – Valeurs intermédiaires

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si $f(b) < 0 < f(a)$ alors il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Corollaire

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement décroissante.
Si $f(b) < 0 < f(a)$ alors il existe un unique réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Définition – Ensemble image

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On appelle **ensemble image de I par f** l'ensemble :

$$\begin{aligned} f(I) &= \{f(x) \text{ tel que } x \in I\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } y \text{ admet un antécédent par } f\} \end{aligned}$$

Définition – Ensemble image

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On appelle **ensemble image de I par f** l'ensemble :

$$\begin{aligned} f(I) &= \{f(x) \text{ tel que } x \in I\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } y \text{ admet un antécédent par } f\} \end{aligned}$$

Théorème – Valeurs intermédiaires

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors $f(I)$ est un intervalle.

Définition – Ensemble image

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On appelle **ensemble image de I par f** l'ensemble :

$$\begin{aligned} f(I) &= \{f(x) \text{ tel que } x \in I\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } y \text{ admet un antécédent par } f\} \end{aligned}$$

Théorème – Valeurs intermédiaires

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire Théorème de la bijection

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors $f(I)$ est un intervalle et la fonction $f : I \longrightarrow f(I)$ est bijective.

Définition – Ensemble image

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On appelle **ensemble image de I par f** l'ensemble :

$$\begin{aligned} f(I) &= \{f(x) \text{ tel que } x \in I\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } y \text{ admet un antécédent par } f\} \end{aligned}$$

Théorème – Valeurs intermédiaires

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire Théorème de la bijection

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors $f(I)$ est un intervalle et la fonction $f : I \longrightarrow f(I)$ est bijective.

Remarque : Si f est continue et bijective, alors f^{-1} est continue.

Exercice : Montrer que la fonction $f : x \in [0; +\infty[\mapsto -2e^x + 1$ induit une bijection sur un ensemble que l'on précisera.

Exercice : Montrer que la fonction $f : x \in [0 ; +\infty[\mapsto -2e^x + 1$ induit une bijection sur un ensemble que l'on précisera.

Solution : La fonction f est continue et strictement décroissante sur $I = [0 ; +\infty[$.

Exercice : Montrer que la fonction $f : x \in [0 ; +\infty[\mapsto -2e^x + 1$ induit une bijection sur un ensemble que l'on précisera.

Solution : La fonction f est continue et strictement décroissante sur $I = [0 ; +\infty[$.
D'après le théorème de la bijection, elle induit une bijection $f : I \longrightarrow f(I)$.

Exercice : Montrer que la fonction $f : x \in [0 ; +\infty[\mapsto -2e^x + 1$ induit une bijection sur un ensemble que l'on précisera.

Solution : La fonction f est continue et strictement décroissante sur $I = [0 ; +\infty[$.
D'après le théorème de la bijection, elle induit une bijection $f : I \longrightarrow f(I)$.
De plus, comme $f(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$,

Exercice : Montrer que la fonction $f : x \in [0 ; +\infty[\mapsto -2e^x + 1$ induit une bijection sur un ensemble que l'on précisera.

Solution : La fonction f est continue et strictement décroissante sur $I = [0 ; +\infty[$.
D'après le théorème de la bijection, elle induit une bijection $f : I \longrightarrow f(I)$.
De plus, comme $f(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, on a $f(I) =] - \infty ; -1]$.

Exercice : Montrer que la fonction $f : x \in [0 ; +\infty[\mapsto -2e^x + 1$ induit une bijection sur un ensemble que l'on précisera.

Solution : La fonction f est continue et strictement décroissante sur $I = [0 ; +\infty[$.
D'après le théorème de la bijection, elle induit une bijection $f : I \longrightarrow f(I)$.
De plus, comme $f(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, on a $f(I) =] - \infty ; -1]$.

III. Bijection et dérivabilité

Proposition

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection, soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Supposons que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en y_0 et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

III. Bijection et dérivabilité

Proposition

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection, soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Supposons que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en y_0 et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Autrement dit, si f' ne s'annule pas, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Exemple 1 : Dérivée de la fonction $\ln$

Si $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction exponentielle, alors $f^{-1} : y \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(y) \in \mathbb{R}$ est sa réciproque.

III. Bijection et dérivabilité

Proposition

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection, soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Supposons que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en y_0 et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Autrement dit, si f' ne s'annule pas, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Exemple 1 : Dérivée de la fonction $\ln$

Si $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction exponentielle, alors $f^{-1} : y \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(y) \in \mathbb{R}$ est sa réciproque.

Pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\ln'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

III. Bijection et dérivabilité

Proposition

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection, soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Supposons que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en y_0 et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Autrement dit, si f' ne s'annule pas, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Exemple 1 : Dérivée de la fonction $\ln$

Si $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction exponentielle, alors $f^{-1} : y \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(y) \in \mathbb{R}$ est sa réciproque.

Pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\ln'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))}$$

III. Bijection et dérivabilité

Proposition

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection, soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Supposons que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en y_0 et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Autrement dit, si f' ne s'annule pas, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Exemple 1 : Dérivée de la fonction $\ln$

Si $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction exponentielle, alors $f^{-1} : y \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(y) \in \mathbb{R}$ est sa réciproque.

Pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\ln'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}.$$

Exemple 2 : Dérivée de la fonction racine carrée

Si $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction carrée, alors $f^{-1} : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ est sa réciproque (la fonction racine carrée).

Exemple 2 : Dérivée de la fonction racine carrée

Si $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction carrée, alors $f^{-1} : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ est sa réciproque (la fonction racine carrée).

Pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exemple 2 : Dérivée de la fonction racine carrée

Si $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction carrée, alors $f^{-1} : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ est sa réciproque (la fonction racine carrée).

Pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2f^{-1}(y)}$$

Exemple 2 : Dérivée de la fonction racine carrée

Si $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction carrée, alors $f^{-1} : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ est sa réciproque (la fonction racine carrée).

Pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Exemple 2 : Dérivée de la fonction racine carrée

Si $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ désigne la fonction carrée, alors $f^{-1} : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_*^+$ est sa réciproque (la fonction racine carrée).

Pour tout $y \in \mathbb{R}_*^+$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

