

Dérivée et élasticité en économie - corrigé des exercices

Exercice 1.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit λ un réel.

Soit $x \in I$.

1. $\varepsilon_{\lambda f}(x) = \frac{x(\lambda f)'(x)}{(\lambda f)(x)} = \frac{\lambda x f'(x)}{\lambda f(x)} = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \varepsilon_f(x).$
2. $\varepsilon_{fg}(x) = \frac{x(fg)'(x)}{(fg)(x)} = \frac{x(f'(x)g(x) + f(x)g'(x))}{f(x)g(x)} = \frac{x f'(x)}{f(x)} + \frac{x g'(x)}{g(x)} = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x).$
3. $\varepsilon_{\frac{1}{f}}(x) = \frac{x\left(\frac{1}{f}\right)'(x)}{\frac{1}{f}(x)} = \frac{-\frac{x f'(x)}{f(x)^2}}{\frac{1}{f}(x)} = -\frac{x f'(x)}{f(x)} = -\varepsilon_f(x).$

Application : Les questions 2 et 3 permettent de voir que $\varepsilon_{\frac{f}{g}} = \varepsilon_{f \times \frac{1}{g}} = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x).$

Ici, on a $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$.

On calcule facilement les élasticité de u et v :

$$\varepsilon_u(x) = 1 \text{ et } \varepsilon_v(x) = x$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'élasticité de f au point x est

$$\varepsilon_f(x) = \varepsilon_u(x) - \varepsilon_v(x) = 1 - x.$$

Exercice 2.

1. La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et pour tout $x \in [0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = e^{-0,5x} - 0,5(x+8)e^{-0,5x} = (-0,5x - 3).$$

Par conséquent, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{x(-0,5x - 3)e^{-0,5x}}{(x+8)e^{-0,5x}} = \frac{-x(0,5x + 3)}{x+8}.$$

Par conséquent, pour tout $x \geq 0$, $\varepsilon_f(x) \leq 0$. Cela signifie que la demande diminue lorsque le prix augmente.

2. Il faut résoudre l'équation :

$$\varepsilon_f(x) = -3,5 \iff \frac{-0,5x^2 - 3x}{x+8} = -3,5 \iff -0,5x^2 - 3x = -3,5(x+8) \iff$$

$$0,5x^2 + 3x - 3,5x - 28 = 0 \iff 0,5x^2 - 0,5x - 28 = 0 \iff x^2 - x - 56 = 0.$$

Pour cette équation du second degré : $\Delta = 1 + 4 \times 56 = 225 = 15^2 > 0$.

Il y a deux solutions : $x_1 = \frac{1+15}{2} = 8$ et $x_2 = \frac{1-15}{2} = -7$, donc une seule solution positive.

Finalement, l'élasticité est égale à $-3,5$ pour un prix unitaire de 800 euros.

3. Lorsque le prix passe de 800 à 804 euros, il varie de 0,5%. Sachant que l'élasticité au point 800 est $-3,5$ (voir question précédente), cela signifie que la demande varie d'environ $-1,75\%$.

