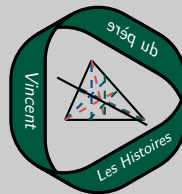


Dérivée et élasticité en économie

Yannick VINCENT

yannick.vincent@umontpellier.fr

Université de Montpellier



Introduction et rappels

I. Dérivée en économie

II. Élasticité en économie

Introduction et rappels

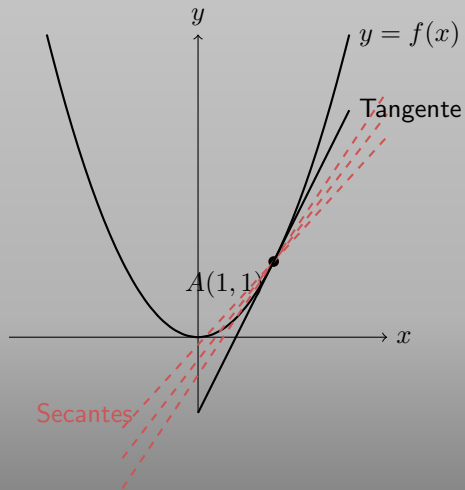
Définition – Nombre dérivé

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On dit que f est **dérivable** en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. On appelle **nombre dérivé** cette limite et on la note $f'(x_0)$. On a donc :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Introduction et rappels

- Graphiquement, le nombre dérivé $f'(x_0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0 .



Introduction et rappels

En approximant une courbe par sa tangente on peut, pour h proche de 0, écrire :

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Introduction et rappels

En approximant une courbe par sa tangente on peut, pour h proche de 0, écrire :

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

soit

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0).$$

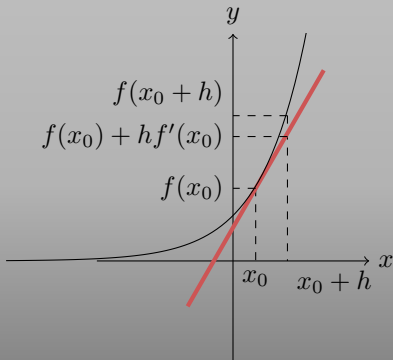
Introduction et rappels

En approximant une courbe par sa tangente on peut, pour h proche de 0, écrire :

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

soit

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0).$$



I. Dérivée en économie

Exercice.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Donner une valeur approchée du coût de production de 203 unités de biens.

I. Dérivée en économie

Exercice.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Donner une valeur approchée du coût de production de 203 unités de biens.

Solution :

On note $q_0 = 200$, $q = 203$ et $\Delta q = q - q_0 = 3$.

I. Dérivée en économie

Exercice.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Donner une valeur approchée du coût de production de 203 unités de biens.

Solution :

On note $q_0 = 200$, $q = 203$ et $\Delta q = q - q_0 = 3$.

$$C(203) \simeq C(q_0) + C'(q_0)\Delta q$$

I. Dérivée en économie

Exercice.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Donner une valeur approchée du coût de production de 203 unités de biens.

Solution :

On note $q_0 = 200$, $q = 203$ et $\Delta q = q - q_0 = 3$.

$$\begin{aligned} C(203) &\simeq C(q_0) + C'(q_0)\Delta q \\ &\simeq 100 + 0,3 \times 3 \end{aligned}$$

I. Dérivée en économie

Exercice.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Donner une valeur approchée du coût de production de 203 unités de biens.

Solution :

On note $q_0 = 200$, $q = 203$ et $\Delta q = q - q_0 = 3$.

$$\begin{aligned} C(203) &\simeq C(q_0) + C'(q_0)\Delta q \\ &\simeq 100 + 0,3 \times 3 \\ &\simeq 100,9 \end{aligned}$$

I. Dérivée en économie

Exercice.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Donner une valeur approchée du coût de production de 203 unités de biens.

Solution :

On note $q_0 = 200$, $q = 203$ et $\Delta q = q - q_0 = 3$.

$$\begin{aligned}C(203) &\simeq C(q_0) + C'(q_0)\Delta q \\&\simeq 100 + 0,3 \times 3 \\&\simeq 100,9\end{aligned}$$

- $C'(200)$ correspond au coût de production d'une unité de biens supplémentaire.

I. Dérivée en économie

Exercice.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Donner une valeur approchée du coût de production de 203 unités de biens.

Solution :

On note $q_0 = 200$, $q = 203$ et $\Delta q = q - q_0 = 3$.

$$\begin{aligned} C(203) &\simeq C(q_0) + C'(q_0)\Delta q \\ &\simeq 100 + 0,3 \times 3 \\ &\simeq 100,9 \end{aligned}$$

- $C'(200)$ correspond au coût de production d'une unité de biens supplémentaire.
- $\frac{C(200)}{200} = 0,5$ est le coût moyen de production de 200 unités de biens.

I. Dérivée en économie

Définition

En économie, si f est une fonction,

- on appelle **fonction moyenne** de f la fonction fM définie par $fM(x) = \frac{f(x)}{x}$.
- on appelle **fonction marginale** de f la fonction f_m définie par $f_m(x) = f'(x)$.

I. Dérivée en économie

Définition

En économie, si f est une fonction,

- on appelle **fonction moyenne** de f la fonction fM définie par $fM(x) = \frac{f(x)}{x}$.
- on appelle **fonction marginale** de f la fonction f_m définie par $f_m(x) = f'(x)$.

En approchant la fonction f par sa tangente, on voit que $f_m(x) \approx f(x+1) - f(x)$.

I. Dérivée en économie

Définition

En économie, si f est une fonction,

- on appelle **fonction moyenne** de f la fonction fM définie par $fM(x) = \frac{f(x)}{x}$.
- on appelle **fonction marginale** de f la fonction f_m définie par $f_m(x) = f'(x)$.

En approchant la fonction f par sa tangente, on voit que $f_m(x) \approx f(x+1) - f(x)$.
Donc $f_m(x)$ est la variation de f correspondant à une augmentation de x de 1 unité.

II. Élasticité en économie

Exercice précédent. :

La production passe de 200 à 203. Le coût passe alors de 100 à 100,9.

Cela correspond à un coût marginal de

$$C'(200) = \frac{dC}{dq}(200) \simeq \frac{100,9 - 100}{203 - 200} \simeq 0,3.$$

II. Élasticité en économie

Exercice précédent. :

La production passe de 200 à 203. Le coût passe alors de 100 à 100,9.

Cela correspond à un coût marginal de

$$C'(200) = \frac{dC}{dq}(200) \simeq \frac{100,9 - 100}{203 - 200} \simeq 0,3.$$

D'un point de vue économique, il est préférable de raisonner en pourcentage.

II. Élasticité en économie

Exercice précédent. :

La production passe de 200 à 203. Le coût passe alors de 100 à 100,9.

Cela correspond à un coût marginal de

$$C'(200) = \frac{dC}{dq}(200) \simeq \frac{100,9 - 100}{203 - 200} \simeq 0,3.$$

D'un point de vue économique, il est préférable de raisonner en pourcentage.

Ainsi, on définit la notion d'élasticité correspondant à

$$\frac{\frac{\Delta C}{C}}{\frac{\Delta q}{q}}$$

II. Élasticité en économie

Exercice précédent. :

La production passe de 200 à 203. Le coût passe alors de 100 à 100,9.

Cela correspond à un coût marginal de

$$C'(200) = \frac{dC}{dq}(200) \simeq \frac{100,9 - 100}{203 - 200} \simeq 0,3.$$

D'un point de vue économique, il est préférable de raisonner en pourcentage.

Ainsi, on définit la notion d'élasticité correspondant à

$$\frac{\frac{\Delta C}{C}}{\frac{\Delta q}{q}} = \frac{\Delta C}{\Delta q} \times \frac{q}{C}.$$

II. Élasticité en économie

Définition – Élasticité arc

Soit $f : I \subset]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a, b \in I$ tels que $f(a) \neq 0$. On appelle **élasticité** de f entre a et b le réel

$$\varepsilon_f(a, b) = \frac{\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}}{\frac{b - a}{a}}.$$

II. Élasticité en économie

Définition – Élasticité ponctuelle

Soit $f : I \subset]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On appelle **élasticité** de f au point x_0 le réel $\epsilon_f(x_0)$ défini par

$$\epsilon_f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x - x_0}{x_0}}$$

Proposition

Soit $f : I \subset]0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Proposition

Soit $f : I \subset]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Démonstration.

$$\frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{x_0}$$

Proposition

Soit $f : I \subset]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Démonstration.

$$\frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x - x_0}{x_0}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \times \frac{x_0}{x - x_0}$$

Proposition

Soit $f : I \subset]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Démonstration.

$$\frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \times \frac{x_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{x_0}{f(x_0)}$$

Proposition

Soit $f : I \subset]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Démonstration.

$$\frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{f(x_0)}{x_0}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \times \frac{x_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{x_0}{f(x_0)} \longrightarrow \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

- L'élasticité d'une fonction en un point est donc le rapport de sa valeur marginale et de sa valeur moyenne : $\varepsilon_f(x) = \frac{f_m(x)}{fM(x)}.$

Proposition

Soit $f : I \subset]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Démonstration.

$$\frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \times \frac{x_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{x_0}{f(x_0)} \longrightarrow \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

- L'élasticité d'une fonction en un point est donc le rapport de sa valeur marginale et de sa valeur moyenne : $\varepsilon_f(x) = \frac{f_m(x)}{fM(x)}$.
- Si en un point x , $|\varepsilon_f(x)| > 1$, on dit que f est **élastique** en x .

Proposition

Soit $f : I \subset]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Démonstration.

$$\frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \times \frac{x_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{x_0}{f(x_0)} \longrightarrow \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

- L'élasticité d'une fonction en un point est donc le rapport de sa valeur marginale et de sa valeur moyenne : $\varepsilon_f(x) = \frac{f_m(x)}{fM(x)}$.
- Si en un point x , $|\varepsilon_f(x)| > 1$, on dit que f est **élastique** en x . Si $|\varepsilon_f(x)| < 1$, on dit que f est **inélastique** en x .

Proposition

Soit $f : I \subset]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors

$$\varepsilon_f(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Démonstration.

$$\frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \times \frac{x_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{x_0}{f(x_0)} \longrightarrow \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

- L'élasticité d'une fonction en un point est donc le rapport de sa valeur marginale et de sa valeur moyenne : $\varepsilon_f(x) = \frac{f_m(x)}{fM(x)}$.
- Si en un point x , $|\varepsilon_f(x)| > 1$, on dit que f est **élastique** en x . Si $|\varepsilon_f(x)| < 1$, on dit que f est **inélastique** en x . Enfin, si $|\varepsilon_f(x)| = 1$, on dit que f est d'**élasticité unitaire** en x .

II. Élasticité en économie

Exercice.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Déterminer l'élasticité de C au point 200. Interpréter.

II. Élasticité en économie

Exercice.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Déterminer l'élasticité de C au point 200. Interpréter.

Solution :

$$\varepsilon(200) = \frac{200C'(200)}{C(200)} = \frac{200 \times 0,3}{100} = 0,6.$$

II. Élasticité en économie

Exercice.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Déterminer l'élasticité de C au point 200. Interpréter.

Solution :

$$\varepsilon(200) = \frac{200C'(200)}{C(200)} = \frac{200 \times 0,3}{100} = 0,6.$$

Cela signifie que lorsque la quantité de biens augmente de 1%, le coût de production augmente approximativement de 0,6%.

II. Élasticité en économie

Exercice.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité produite. On note q la quantité produite (en unité de biens) et $C(q)$ le coût de production correspondant (en euros). On suppose de plus que $C(200) = 100$ et $C'(200) = 0,3$.

Déterminer l'élasticité de C au point 200. Interpréter.

Solution :

$$\varepsilon(200) = \frac{200C'(200)}{C(200)} = \frac{200 \times 0,3}{100} = 0,6.$$

Cela signifie que lorsque la quantité de biens augmente de 1%, le coût de production augmente approximativement de 0,6%. Le coût de production est inélastique en $Q = 200$.

II. Élasticité en économie

Autres Applications classiques

- Si la demande Q d'un bien dépend des revenus R , $\epsilon_Q(R)$ est appelée l'**élasticité-revenus**.

II. Élasticité en économie

Autres Applications classiques

- Si la demande Q d'un bien dépend des revenus R , $\epsilon_Q(R)$ est appelée l'**élasticité-revenus**.
- Si elle dépend du prix P , $\epsilon_Q(P)$ est appelée l'**élasticité-prix**.

Merci et à bientôt !

