

Variations et extrema - corrigé des exercices

Exercice 1.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 5x - 3$. On résout $f'(x) = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 61$$

f' admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{61}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{61}}{6}.$$

On obtient ensuite le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$+\infty$	

Exercice 2.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 + 10x = 2x(2x^2 + 5)$.

On a $f'(-x) = 0 \iff x = 0$.

De plus, $f'(x)$ est du signe de x . On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

Exercice 3.

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{7\}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$, $f'(x) = -\frac{8}{(x-7)^2} < 0$.

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	7	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1	$-\infty$	1

Exercice 4.

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$. Ainsi, $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

On obtient ensuite le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5.

f est dérivable sur $\left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$ comme composée de fonctions dérivables.

Pour tout $\left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$, $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-4}} > 0$. Ainsi f est strictement croissante et sur $\left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$ et on a le tableau de variations suivant :

x	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

Exercice 6.

f est dérivable sur $] -4; +\infty[$ comme quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout $x \in] -4; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2 \times (x+4) - (x^3 - 2) \times 1}{(x+4)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 12x^2 + 2}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

Il faut ensuite étudier le signe du numérateur. Ce polynôme de degré 3 n'admet pas de racine évidente. On va donc étudier ses variations pour en déduire le signe.

On note $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2$. La fonction g est dérivable sur $] -4; +\infty[$ et pour tout $x \in] -4; +\infty[$,

$$g'(x) = 6x^2 + 24x = 6x(x+4).$$

On obtient par conséquent le tableau de variations de g :

x	-4	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow +\infty$

On déduit du tableau de variations que pour tout $x \in]-4; +\infty[$, $g(x) \geq 2$ et donc que g est strictement positive sur $] -4; +\infty[$.

Finalement, le tableau de variations de f est le suivant :

x	-4	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

Remarque. Sur l'intervalle $] -\infty; -4[$, l'étude des variations de f serait plus compliquée car la fonction g n'est pas de signe constant et il n'est pas possible de déterminer simplement ses racines.