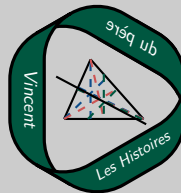


Variations et extrema

Yannick VINCENT

yannick.vincent@umontpellier.fr

Université de Montpellier



I. Définitions

II. Lien entre dérivées et variations

III. Exercice corrigé

IV. Extrema

I. Définitions

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D . On dit que :

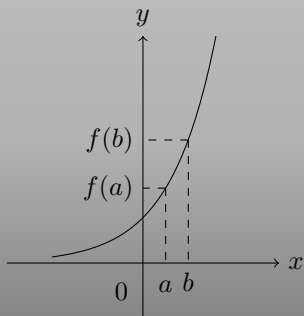
- f est **croissante** sur D si pour tous $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
- f est **décroissante** sur D si pour tous $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$.
- f est **monotone** sur D si elle est croissante ou décroissante sur D .

I. Définitions

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D . On dit que :

- f est **croissante** sur D si pour tous $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
- f est **décroissante** sur D si pour tous $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$.
- f est **monotone** sur D si elle est croissante ou décroissante sur D .

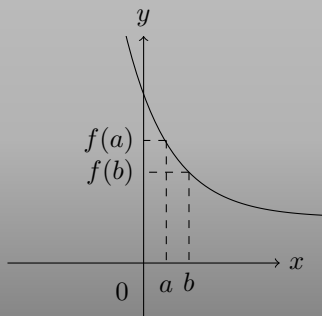
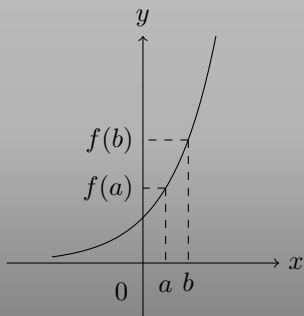


I. Définitions

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D . On dit que :

- f est **croissante** sur D si pour tous $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
- f est **décroissante** sur D si pour tous $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$.
- f est **monotone** sur D si elle est croissante ou décroissante sur D .



I. Définitions

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D . On dit que :

- f est **strictement croissante** sur D si pour tous $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
- f est **strictement décroissante** sur D si pour tous $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
- f est **strictement monotone** sur D si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur D .

II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Accroissements finis

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

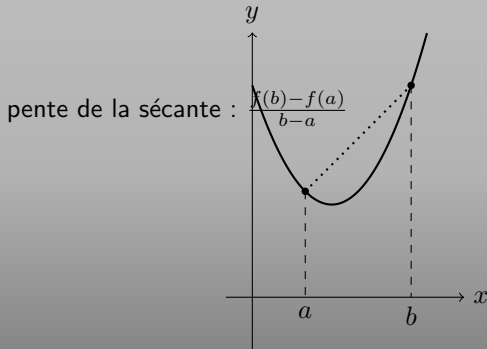
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Accroissements finis

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

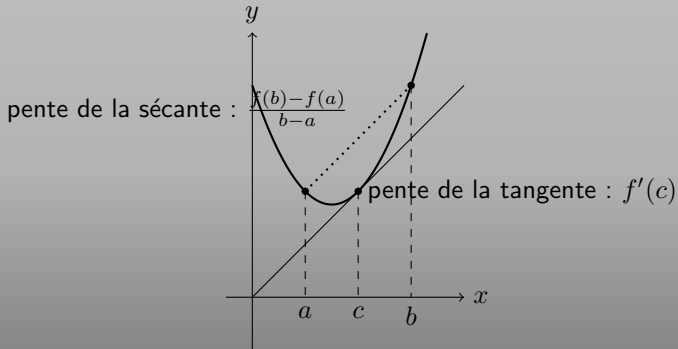


II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Accroissements finis

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) positive sur un intervalle I , alors f est (strictement) croissante sur I .

II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) positive sur un intervalle I , alors f est (strictement) croissante sur I .

Attention ! Cette propriété n'est pas vraie si I n'est pas un intervalle.

II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) positive sur un intervalle I , alors f est (strictement) croissante sur I .

Attention ! Cette propriété n'est pas vraie si I n'est pas un intervalle.

Exemple : si f est la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

II. Lien entre dérivées et variations

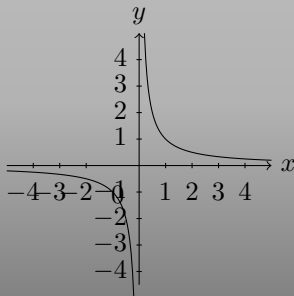
Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) positive sur un intervalle I , alors f est (strictement) croissante sur I .

Attention ! Cette propriété n'est pas vraie si I n'est pas un intervalle.

Exemple : si f est la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.



II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) positive sur I , alors f est (strictement) croissante sur I .

II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) positive sur I , alors f est (strictement) croissante sur I .

Démonstration.

II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) positive sur I , alors f est (strictement) croissante sur I .

Démonstration.

Supposons que f' est positive.

II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) positive sur I , alors f est (strictement) croissante sur I .

Démonstration.

Supposons que f' est positive.

Soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$.

II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) positive sur I , alors f est (strictement) croissante sur I .

Démonstration.

Supposons que f' est positive.

Soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$

tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) positive sur I , alors f est (strictement) croissante sur I .

Démonstration.

Supposons que f' est positive.

Soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$

tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ainsi,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \geq 0.$$

II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) positive sur I , alors f est (strictement) croissante sur I .

Démonstration.

Supposons que f' est positive.

Soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$

tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ainsi,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \geq 0.$$

On a bien $f(a) \leq f(b)$.



II. Lien entre dérivées et variations

Théorème – Dérivée et variations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f' est (strictement) négative sur I , alors f est (strictement) décroissante sur I .

II. Lien entre dérivées et variations

Proposition – Réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f est croissante sur I alors $f' \geqslant 0$ sur I .

II. Lien entre dérivées et variations

Proposition – Réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f est croissante sur I alors $f' \geq 0$ sur I .

Démonstration.

Supposons que f est croissante sur I .

II. Lien entre dérivées et variations

Proposition – Réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f est croissante sur I alors $f' \geq 0$ sur I .

Démonstration.

Supposons que f est croissante sur I .

Soient $a, b \in I$, on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0.$$

II. Lien entre dérivées et variations

Proposition – Réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f est croissante sur I alors $f' \geq 0$ sur I .

Démonstration.

Supposons que f est croissante sur I .

Soient $a, b \in I$, on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0.$$

Par passage à la limite, on obtient $f'(a) \geq 0$.



II. Lien entre dérivées et variations

Proposition – Réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f est croissante sur I alors $f' \geq 0$ sur I .

Démonstration.

Supposons que f est croissante sur I .

Soient $a, b \in I$, on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0.$$

Par passage à la limite, on obtient $f'(a) \geq 0$.



Attention ! Si f est strictement croissante sur un intervalle I , on n'a pas nécessairement $f' > 0$ sur I .

II. Lien entre dérivées et variations

Proposition – Réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Si f est croissante sur I alors $f' \geq 0$ sur I .

Démonstration.

Supposons que f est croissante sur I .

Soient $a, b \in I$, on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0.$$

Par passage à la limite, on obtient $f'(a) \geq 0$.



Attention ! Si f est strictement croissante sur un intervalle I , on n'a pas nécessairement $f' > 0$ sur I . Il suffit par exemple de considérer le cas de la fonction $x \longmapsto x^3$.

III. Exercice corrigé

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

III. Exercice corrigé

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Solution :

III. Exercice corrigé

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Solution :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$$

III. Exercice corrigé

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Solution :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$$

En factorisant,

$$f'(x) = 6(x - 1)(x + 2).$$

III. Exercice corrigé

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Solution :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$$

En factorisant,

$$f'(x) = 6(x - 1)(x + 2).$$

On obtient ainsi le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	21		-6	$+\infty$

IV. Extrema

Définition – Extremum global

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $c \in I$. On dit que :

- f admet un **maximum (global)** en c si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(c)$.
- f admet un **minimum (global)** en c si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(c)$.

IV. Extrema

Définition – Extremum local

Soit I un intervalle et $c \in I$. On considère une fonction f définie sur I .

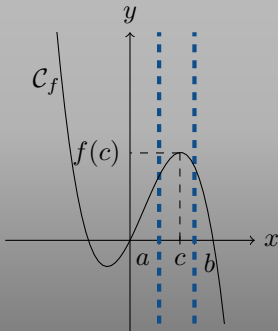
- Dire que f admet un **maximum local** (respectivement **minimum local**) en c signifie qu'il existe un intervalle $]a; b[$ contenant c (avec $a \neq b$) et tel que pour tout $x \in]a; b[\cap I$, $f(x) \leq f(c)$ (respectivement $f(x) \geq f(c)$).
- Un **extremum local** est un maximum local ou un minimum local.

IV. Extrema

Définition – Extremum local

Soit I un intervalle et $c \in I$. On considère une fonction f définie sur I .

- Dire que f admet un **maximum local** (respectivement **minimum local**) en c signifie qu'il existe un intervalle $]a; b[$ contenant c (avec $a \neq b$) et tel que pour tout $x \in]a; b[\cap I$, $f(x) \leq f(c)$ (respectivement $f(x) \geq f(c)$).
- Un **extremum local** est un maximum local ou un minimum local.



IV. Extrema

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$.

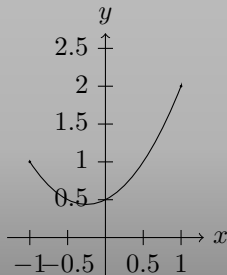
- Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$.
- Si f' s'annule en changeant de signes alors f admet un extremum local en c .

IV. Extrema

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$.

- Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$.
 - Si f' s'annule en changeant de signes alors f admet un extremum local en c .
- L'hypothèse que l'intervalle I soit ouvert est indispensable.



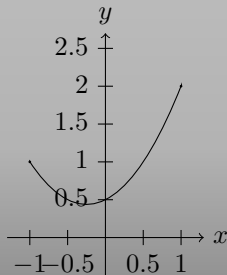
IV. Extrema

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$.

- Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$.
- Si f' s'annule en changeant de signes alors f admet un extremum local en c .

- L'hypothèse que l'intervalle I soit ouvert est indispensable.



- L'hypothèse $f'(c) = 0$ n'est pas suffisante pour avoir un extremum local.

Démonstration.

Démonstration.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$ tel que f admet un maximum local en c .

Démonstration.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$ tel que f admet un maximum local en c .

Il existe un intervalle $]a; b[\subset I$ tel que $c \in I$ et tel que pour tout $x \in]a; b[$,
 $f(x) - f(c) \leq 0$.

Démonstration.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$ tel que f admet un maximum local en c .

Il existe un intervalle $]a; b[\subset I$ tel que $c \in I$ et tel que pour tout $x \in]a; b[$, $f(x) - f(c) \leq 0$. Donc, pour $x \in]a; b[\setminus \{c\}$,

$$\begin{cases} \text{Si } x > c, & \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \\ \text{Si } x < c, & \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \end{cases} .$$

Démonstration.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$ tel que f admet un maximum local en c .

Il existe un intervalle $]a; b[\subset I$ tel que $c \in I$ et tel que pour tout $x \in]a; b[$, $f(x) - f(c) \leq 0$. Donc, pour $x \in]a; b[\setminus \{c\}$,

$$\begin{cases} \text{Si } x > c, & \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \\ \text{Si } x < c, & \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \end{cases} .$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

Démonstration.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$ tel que f admet un maximum local en c .

Il existe un intervalle $]a; b[\subset I$ tel que $c \in I$ et tel que pour tout $x \in]a; b[$, $f(x) - f(c) \leq 0$. Donc, pour $x \in]a; b[\setminus \{c\}$,

$$\begin{cases} \text{Si } x > c, & \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \\ \text{Si } x < c, & \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ et que $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$.

Démonstration.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$ tel que f admet un maximum local en c .

Il existe un intervalle $]a; b[\subset I$ tel que $c \in I$ et tel que pour tout $x \in]a; b[$, $f(x) - f(c) \leq 0$. Donc, pour $x \in]a; b[\setminus \{c\}$,

$$\begin{cases} \text{Si } x > c, & \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \\ \text{Si } x < c, & \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \end{cases} .$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ et que $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$.

Finalement,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0.$$

Démonstration.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$ tel que f admet un maximum local en c .

Il existe un intervalle $]a; b[\subset I$ tel que $c \in I$ et tel que pour tout $x \in]a; b[$, $f(x) - f(c) \leq 0$. Donc, pour $x \in]a; b[\setminus \{c\}$,

$$\begin{cases} \text{Si } x > c, & \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \\ \text{Si } x < c, & \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ et que $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$.

Finalement,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0.$$

- Le deuxième point s'obtient en dressant le tableau de variations de la fonction f .

Merci et à bientôt !

