

Calculs de dérivées - corrigés des exercices

Les corrigés des exercices 3 et 4 ne sont pas détaillés. Il convient néanmoins de les rédiger comme dans les deux premiers. Dans tout le corrigé, D_f désigne l'ensemble de définition de f et $D_{f'}$ son ensemble de dérivabilité.

Exercice 1.

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -5 \times 2x + 3 = -10x + 3$.

2. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x = x$

3. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ comme quotient de deux fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v(x) = x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{1 \times (x - 5) - (x + 2) \times 1}{(x - 5)^2} \\ &= \frac{-7}{(x - 5)^2} \end{aligned}$$

4. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 4x$

Remarque : il était également possible d'utiliser la formule de la dérivée d'un produit. On retrouve évidemment le même résultat.

5. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\text{On a, pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = v \circ u(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = 1 - x \\ v(x) = 2x^9 \end{cases}, \quad \begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = 18x^8 \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(u(x))u'(x) \\ &= 18(1 - x)^8(-1) \\ &= -18(1 - x)^8 \end{aligned}$$

6. • $f(x)$ est bien défini si $\begin{cases} x \geq 0 \\ \text{et} \\ x^2 + 3 \end{cases}$, c'est-à-dire si $x \in [0; +\infty[$.

- De plus, $f'(x)$ existe si $\begin{cases} x > 0 \\ \text{et} \\ x^2 + 3 \end{cases}$, c'est-à-dire si $x \in]0; +\infty[$.

- Ainsi f est définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\text{On a } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = 3 + x^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 2x \end{cases}.$$



Donc, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{\frac{3+x^2}{2\sqrt{x}} - 2x\sqrt{x}}{(3+x^2)^2} \\ &= \frac{\frac{3+x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{4x^2}{2\sqrt{x}}}{(3+x^2)^2} \\ &= \frac{3-3x^2}{2\sqrt{x}(3+x^2)^2} \end{aligned}$$

7. f est définie $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

8. $f'(x)$ existe pour tout x tel que $x^2 - x - 1 \neq 0$. En déterminant les racines de ce polynôme, on trouve que $f'(x)$ existe pour tout x tel que $x \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

9. Si $x \in \left] -\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right[$, $x^2 - x - 1 > 0$ donc $f(x) = x^2 - x - 1$.

En revanche, si $x \in \left] \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right[$, $x^2 - x - 1 < 0$ donc $f(x) = -(x^2 - x - 1) = -x^2 + x + 1$.

On obtient par conséquent l'expression de $f'(x)$ par morceaux :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \in \left] -\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right[\\ -2x+1 & \text{si } x \in \left] \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right[\end{cases}$$

Exercice 2.

- $f(x)$ est bien défini si $\sin(x) \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq k\pi$ (pour tout $k \in \mathbb{Z}$).
 - De même, $f'(x)$ existe si $\sin(x) \neq 0$. Par conséquent, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\bullet \text{ On a } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \sin(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos(x) \end{cases}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

2. f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Pour tout } x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$$

3. f est définie sur $]0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\text{Pour tout } x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$$



4. f est définie et dérivable comme quotient de fonctions dérivables pour x tel que $8 - 5x \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{8}{5}\}$.

On a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x + 2 \\ v(x) = 8 - 5x \end{cases}$, $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = -5 \end{cases}$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{8}{5}\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{2(8 - 5x) - (-5)(2x + 2)}{(8 - 5x)^2} \\ &= \frac{26}{(8 - 5x)^2} \end{aligned}$$

5. • $f(x)$ est bien défini si $3x + 1 \geq 0$, c'est-à-dire si $x \geq -\frac{1}{3}$.
 • $f'(x)$ existe si $3x + 1 > 0$ c'est-à-dire si $x > -\frac{1}{3}$. Ainsi, f est définie sur $D_f = [-\frac{1}{3}; +\infty[$ et dérivable sur $D_{f'} =]-\frac{1}{3}; +\infty[$.

• On a $f = v \circ u$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x + 1 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$, $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$. Donc, pour tout $x \in]-\frac{1}{3}; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(u(x))u'(x) \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \end{aligned}$$

6. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables (fonctions de référence).
 Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{2x}{5} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 + 5}{5x^2}.$$

7. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction qui ne s'annule pas.

On a $f = \frac{1}{v}$ avec $v(x) = 3 + x^2$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{v'(x)}{v(x)^2} \\ &= -\frac{2x}{(3 + x^2)^2} \end{aligned}$$

8. f est une fonction de référence (puissance négative). Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

Exercice 3.

1. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{x^2}$$

2. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} - 8x$$



$$3. D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \\ f'(x) = -2(x-1) = -2x + 2$$

$$4. D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \\ f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$5. D_f =]-\infty; \frac{1}{4}] \text{ et } D_{f'} =]-\infty; \frac{1}{4}[\\ f'(x) = -\frac{2}{7\sqrt{1-4x}}$$

$$6. D_f =]-\infty; \frac{2}{3}] \text{ et } D_{f'} =]-\infty; \frac{2}{3}[\\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x(3-2x)}}$$

$$7. D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \\ f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$8. D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \\ f'(x) = -7 \sin(7x + 5)$$

Exercice 4.

$$1. D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^* \\ f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^2} = \frac{3x^4 + 2}{x^2}$$

$$2. D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \\ f'(x) = -7$$

$$3. D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \\ f'(x) = 40(2x-1)^4$$

$$4. D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ f'(x) = \frac{2x + 2x^2}{(x+1)^4}$$

$$5. D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \\ f'(x) = 2x - x^4$$

$$6. D_f = D_{f'} =]-\frac{3}{4}; +\infty[\\ f'(x) = \frac{3+2x}{\sqrt{3+4x(3+4x)}}$$

$$7. D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \\ f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$8. D_f = [-\frac{1}{3}; +\infty[\text{ et } D_{f'} =]-\frac{1}{3}; +\infty[\\ f'(x) = \frac{15x^2 + 4x}{2\sqrt{3x+1}}$$