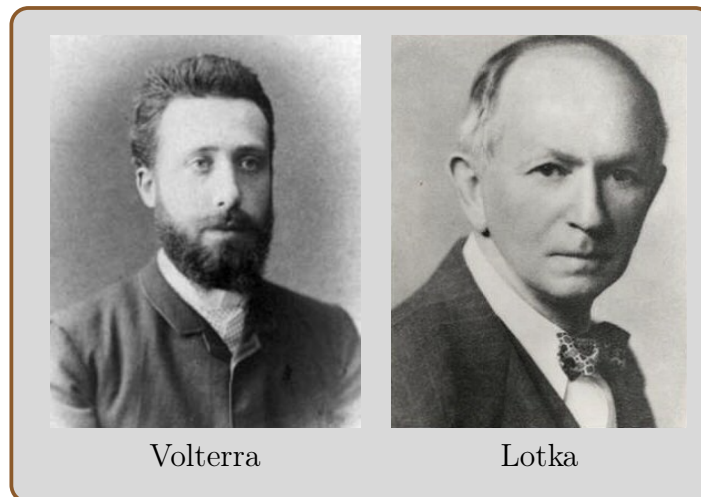


TP 5 – Modèle proie prédateur en biologie

Histoire

En mathématiques, les équations de Lotka – Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de « modèle proie-prédateur », sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent. Elles ont été proposées indépendamment par **Alfred James Lotka** en 1925 et **Vito Volterra** en 1926.



Volterra

Lotka

On s'intéresse à l'évolution de la population de renards (prédateurs) et de mulots (proies) dans un parc naturel. On désigne par R_n et M_n le nombre respectif de renards et de mulots en fonction du nombre de semaines n écoulées depuis le début de l'étude.

On sait qu'au cours de chaque semaine :

- S'il n'y avait aucun renard dans le parc naturel, le nombre de mulots augmenterait de 4,5%. Toutefois, parmi les $R_n \times M_n$ rencontres possibles entre les individus des deux espèces, seules 0,1% ont effectivement lieu chaque semaine. On sait de plus qu'à chaque rencontre, le mulot est dévoré par le renard.
- Parmi les R_n renards, 2,5% meurent en raison de maladies ou en étant tués par des chasseurs. En revanche, le fait de dévorer des mulots permet aux renards de se reproduire davantage. On estime que le nombre de naissances de renards par semaine correspond à 20% du nombre de mulots dévorés.

1. Justifier que pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} M_{n+1} = 1,045M_n - 0,001R_n \times M_n \\ R_{n+1} = 0,975R_n + 0,0002R_n \times M_n \end{cases}$$
2. Supposons qu'il n'y ait pas de prédateur (c'est-à-dire $R_n = 0$ pour tout n). Quel est le sens de variations de la suite (M_n) ? Quelle est sa limite?
3. Supposons qu'il n'y ait pas de proie (c'est-à-dire $M_n = 0$ pour tout n). Quel est le sens de variations de la suite (R_n) ? Quelle est sa limite?
4. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} M_{n+1} - M_n = M_n(0,045 - 0,001R_n) \\ R_{n+1} - R_n = R_n(-0,025 + 0,0002M_n) \end{cases}$$

En supposant qu'il y ait des proies et des prédateurs, quels auraient dû être les nombres de renards et de mulots initialement dans le parc naturel pour que ceux-ci soient constants?

5. On considère le cas où il y avait 100 renards et 100 mulots au début de l'étude. On souhaite déterminer l'évolution du nombre de renards et de mulots sur dix ans, c'est-à-dire 520 semaines. On crée pour cela l'algorithme ci-dessous écrit en langage Python dans lequel **P** et **L** sont des listes destinées à contenir les 520 premiers termes des suites (R_n) et (M_n) .

```
1 R=100
2 M=100
3 L=[]
4 P=[]
5 for k in range(519):
6     ....
7     ....
8     ....
9     L.append(M)
10    P.append(R)
```

- Compléter l'algorithme afin qu'il calcule les 520 premiers termes des suites (R_n) et (M_n) .
- Tester l'algorithme avec Python en faisant afficher les listes **P** et **L** calculées par l'algorithme.
- En utilisant le package matplotlib, tracer les courbes du nombre de renards et du nombre de mulots en fonction du temps.