Matrices et géométrie – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆			1, 3		1, 2, 3	
Exercices ⋆⋆	5, 4				5, 4	
Exercices ⋆⋆⋆		6	6		6	

Exercice 1 ⋆ [Représenter, Calculer]

Représenter un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, et les points $\mathrm{A}(4\,;5)$, $\mathrm{B}(1\,;3)$ et $\mathrm{C}(-2\,;-1)$. Dans chaque cas, déterminer graphiquement les coordonnées des points considérés puis retrouver le résultat par le calcul.

- A' est l'image de A par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
- A" est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
- B' est l'image de B par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- B" est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
- C' est l'image de C par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 ⋆ [Calculer]

Transformer les expressions suivantes sous la forme $A\cos(\omega t+\varphi)$.

1. $f(t)=\cos(t)+\sin(t)$
2. $f(t)=\sqrt{3}\cos(2t)-\sin(2t)$
3. $f(t)=6\cos(4t)+2\sqrt{3}\sin(4t)$
4. $f(t)=\sqrt{3}\cos(9t)-\sqrt{3}\sin(9t)$

Exercice 3 ⋆ [Calculer, Représenter]

Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$. Justifier, sans calcul, que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$A^{6n}=\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 4 ⋆⋆ [Calculer, Chercher]

Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$.

Exercice 5 ⋆⋆ [Calculer]

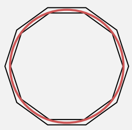
Montrer que pour tous $a,b\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ tels que $\tan(a)\tan(b)\neq 1$:

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

Exercice 6 ⋆⋆⋆ **[Modéliser, Représenter, Calculer]**

L'objectif de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre π.

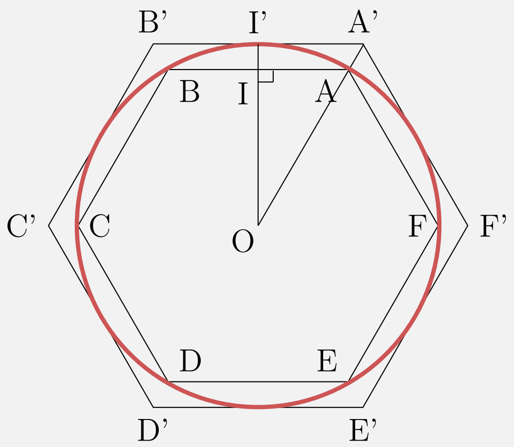
On sait que le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ est π. L'idée de la méthode d'Archimède consiste à encadrer ce cercle entre deux polygones réguliers inscrits et circonscrits. Plus le nombre de côtés des polygones est élevé, plus l'approximation sera précise.



Pour un entier $n \geqslant 3$, on note p_n le périmètre du polygone à n côtés intérieur au cercle de rayon $\dfrac{1}{2}$ et q_n le périmètre du polygone à n côtés extérieur à ce même cercle. On a :

$$p_n \leqslant \pi \leqslant q_n$$

Sur la figure ci-dessous, on considère que les deux polygones ont n côtés.



Partie A - Formules explicites en fonction de n

1. Justifier que $\widehat{\mathrm{IOA}} = \dfrac{\pi}{n}$.
2. (a) Calculer la longueur IA en fonction de n.
   (b) Montrer que $p_n = n \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.
   (c) Montrer que $q_n = n \tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.
3. Calculer p_3 et q_3.

Partie B - Formules par récurrence

1. Pour cette question, on rappelle les formules suivantes : pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) = 2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1$ et $\sin(x) = 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $q_{2n} = \dfrac{2p_nq_n}{p_n + q_n}$ et $p_{2n} = \sqrt{p_nq_{2n}}$.
2. En utilisant la calculatrice, en déduire des valeurs approchées de p_6 et de q_6.
3. On considère l'algorithme suivant écrit en langage naturel.

   def approx(k)
   $n \longleftarrow 3$
   $\text{P} \longleftarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
   $\text{Q} \longleftarrow 3\sqrt{3}$
   Tant que $\text{Q-P} > k$:
   $\text{Q} \longleftarrow \dfrac{2\text{PQ}}{\text{P+Q}}$
   $\text{P} \longleftarrow \sqrt{\text{PQ}}$
   $n \longleftarrow 2n$
   Fin Tant que
   Retourner $(n,\ \text{P},\ \text{Q})$

   Programmer cet algorithme en langage Python et le tester afin d'obtenir une valeur approchée de π à 10^{-5} près. Combien de côté possède le polygone ayant permis d'obtenir cette approximation ? Combien de valeurs de P et de Q l'algorithme a-t-il calculé afin d'obtenir cette approximation ?
4. Quel sont les avantages et inconvénients des deux méthodes de calculs (formules explicites et formules par récurrence) ?