Lycée Lucie Aubrac - Terminale

Chapitre 8
Matrices et Géométrie

Table des matières

1 Matrices et transformation du plan

Rappel.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Alors,

$$f \text{ est linéaire} \iff \text{Pour tous } \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ \text{et} \\ f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) \end{cases}$$

$$\iff \text{Il existe des réels } a, b, c \text{ et } d \text{ tels que : pour tous } x, y \in \mathbb{R}, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on note $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on a : pour tout x, $y \in \mathbb{R}$, $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
De plus,

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et } f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Enfin, on sait que si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sont deux applications linéaires, alors $f \circ g$ est une application linéaire et :

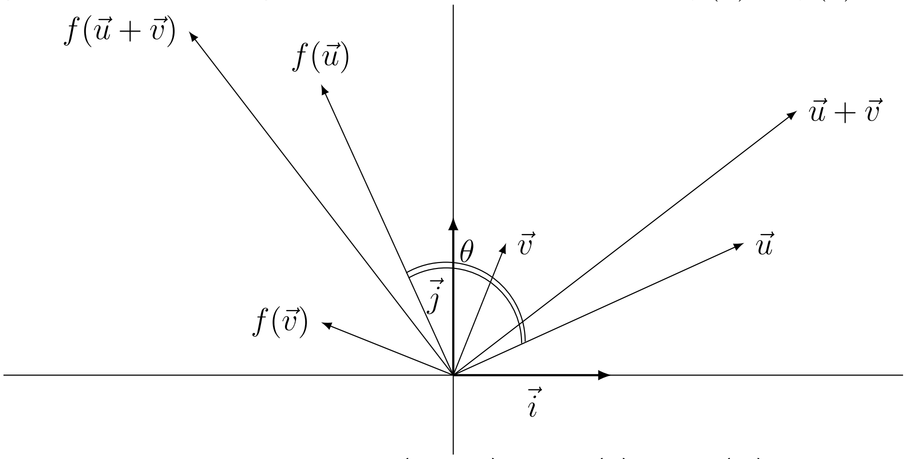
$$\mathrm{Mat}(f \circ g) = \mathrm{Mat}(f) \times \mathrm{Mat}(g).$$

Proposition 1

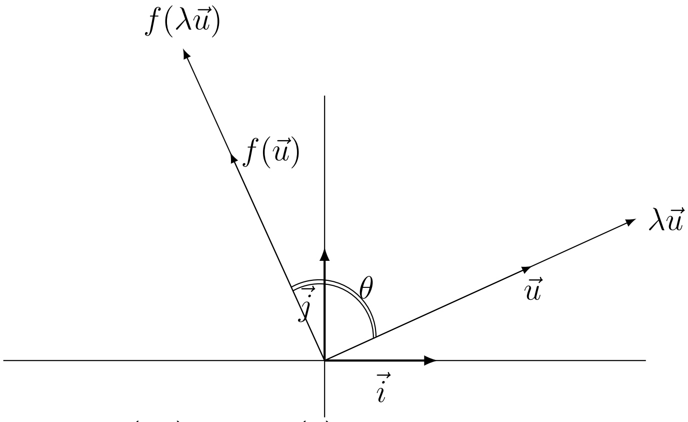
On considère une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
- Si f est la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses, alors f est linéaire et $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Si f est la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées, alors f est linéaire et $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Si f est l'homothétie de centre O et de rapport λ, alors f est linéaire et $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- Si f est la rotation de centre O et d'angle θ, alors f est linéaire et $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Démonstration.
- Soit f la symétrie axiale par apport à l'axe des abscisses :
  Pour tous, $x, y \in \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Soit f la symétrie axiale par apport à l'axe des ordonnées :
  Pour tous, $x, y \in \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Soit f l'homothétie de centre O et de rapport λ :
  Pour tous, $x, y \in \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- Soit f la rotation de centre O et d'angle θ :
  On va montrer que f vérifie la condition de la propriété 1.
  Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est obtenu comme étant la diagonale du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est alors clair sur le dessin ci dessous que $f(\vec{u}+\vec{v})$ (l'image de cette diagonale par f) sera la diagonale du parallélogramme formé par les vecteurs $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$.

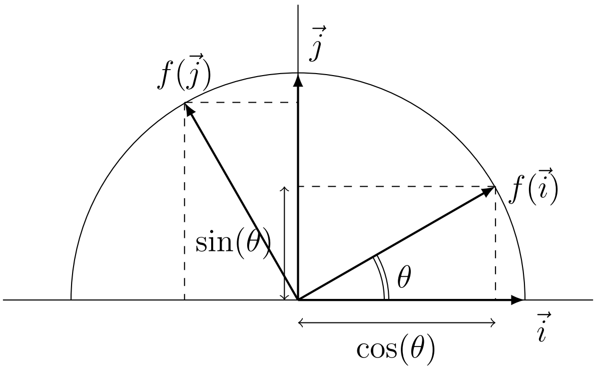


  Cela exprime exactement le fait que $f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
  Par ailleurs, l'image de $\lambda\vec{u}$ par la rotation f est le vecteur $\lambda f(\vec{u})$ (voir dessin ci-dessous).



  Cela exprime le fait que $f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  Au final, on a montré que f vérifie les conditions de la propriété 1 et on en déduit donc que f est linéaire.

Le dessin ci-dessous montre de plus que
$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\\sin(\theta)\end{pmatrix}$ et que $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\\cos(\theta)\end{pmatrix}$.



Ainsi, on a $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

□

Histoire – Matrices et géométrie non commutative

Le fait que le produit de deux matrices ne commute pas nécessairement a des conséquences importantes pour les physiciens. En effet, la mécanique quantique s'est développée au début du XIX$^{\text{e}}$ siècle. **Werner Heisenberg** (1901-1976) a ainsi exprimé le principe d'incertitude selon lequel il n'est pas possible de donner un sens de manière extrêmement précise à la position et à la vitesse d'une particule. Ainsi, la géométrie des particules ne doit plus être comprise à l'aide des coordonnées cartésiennes mais plutôt à l'aide d'applications linéaires et donc de matrices (en fait de taille infinie).

Werner Heisenberg

2 Application à la trigonométrie

Histoire – Trigonométrie

Le mot trigonométrie est formé sur les mots grecs *trigonos* (triangle) et *métron* (mesure). Il s'agit du domaine des mathématiques qui étudie les relations entre les longueurs des côtés d'un triangle et les mesures des angles. L'origine de la trigonométrie est très ancienne étant donné que certains résultats étaient déjà connus dans l'antiquité en Egypte et en Mésopotamie notamment. Les Grecs ont par ailleurs beaucoup utilisé la trigonométrie pour se repérer dans le ciel en astronomie. Ils repéraient alors la mesure d'un angle par la longueur de la corde qu'il intercepte. Ce n'est que plus tard, vers l'an 400 que les mathématiciens indiens vont définir le sinus d'un angle. On trouve d'ailleurs des calculs de valeurs approchées du sinus d'un angle dans les travaux du mathématicien indien Brahmagupta vers l'an 600. Ce mathématicien et astronome est en fait l'un des savant les plus importants de son époque. Il est d'ailleurs considéré comme étant le premier mathématicien a avoir défini formellement le zéro dans son ouvrage intitulé *Brâhma Siddhânta* et rédigé intégralement en vers.

Proposition 2 – (Rappel)

Soit a un réel.

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

Proposition 3 – Formules d'addition

Soient a et b deux réels.

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Démonstration.

Soit a et b deux réels. On note f la rotation de centre O et d'angle a et g la rotation d'angle b. On a $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}(g) = \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$.

Par conséquent, on a :

$$\text{Mat}(f \circ g) = \text{Mat}(f) \times \text{Mat}(g) = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & -(\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)) \\ \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) & \cos(a)\cos(b) - sin(a)\sin(b) \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, on sait que $f \circ g$ est une rotation de centre O et d'angle $a+b$. On a donc

$$\text{Mat}(f \circ g) = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$

Par unicité des coefficients de la matrice $\text{Mat}(f \circ g)$, on en déduit les deux formules suivantes :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

Les deux autres formules s'en déduisent en appliquant les formules précédentes à a et $-b$ et en utilisant le fait que $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$. □

Histoire – Formules d'addition

Au Xᵉ et XIᵉ siècle, la trigonométrie devient une discipline à part entière dans le monde musulman en se détachant de l'astronomie. C'est à cette époque que le mathématicien **Abu Al-Wafa** découvre des formules comparables aux formules d'addition du sinus. Par la suite, **Omar Khayam** (1048-1131) va également utiliser la trigonométrie pour résoudre des équations algébriques à l'aide de méthodes géométriques.

Peinture représentant Omar Khayam et datant du début du XXᵉ siècle

Méthode – Transformer $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t + \varphi)$

- Calculer $A = \sqrt{a^2+b^2}$ (de manière similaire au calcul d'une norme).
- Factoriser l'expression par A.
- Faire apparaître $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$ puis utiliser la formule du cosinus d'une somme.

Exemple.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t)$.
Déterminer deux réels A et φ tels que $f(t) = A\cos(3t+\varphi)$.

Solution :
On calcule A de manière similaire au calcul d'une norme :

$$A = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3t)\right) \\ &= 2 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(3t) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(3t)\right) \\ &= 2\cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $A = 2$ et $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Proposition 4 – Formules de duplication

Soit a un réel.

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Démonstration.
Il s'agit d'une application directe de la Proposition 4 (formules d'addition) pour $a = b$. □

QCM d'entrainement

Savoir-faire du chapitre

- Associer une matrice à une transformation géométrique du plan (rotation, homothétie, symétrie).
- Connaître et utiliser les formules trigonométriques.