

Géométrie
Licence 2
Yannick VINCENT
Université Gustave Eiffel

Table des matières

1	Rappels	6
I.	Le plan : bases et repères	6
1.	Bases du plan	6
2.	Repères du plan et coordonnées	8
3.	Rappels sur les angles	10
II.	Produit scalaire et déterminant	12
1.	Produit scalaire	12
2.	Déterminant	13
III.	Groupes	14
1.	Définitions	14
2.	Sous-groupes	15
3.	Sous groupe engendré	16
4.	Ordre d'un élément et ordre d'un sous-groupe	16
5.	Morphismes de groupes	17
6.	Le cercle unité et le groupe des racines n^e dans \mathbb{C}	17
IV.	Exercices	19
2	Droites, triangles et cercles du plan	22
I.	Droites	22
1.	Équations cartésiennes et paramétrage	22
2.	Équation normale d'une droite	22
3.	Équation complexe	23
4.	Distance d'un point à une droite	23
II.	Triangles	24
1.	Relations dans le triangle	24
2.	Médianes et centre de gravité	25
3.	Médiatrices et cercle circonscrit	26
4.	Bissectrices et cercle inscrit	27
5.	Hauteurs	27
III.	Cercles	28
1.	Équations de cercles	28
2.	Angles au centre et angles inscrit	28
3.	Birapport et cocyclicité	31

IV. Exercices	32
3 Barycentres	35
I. Barycentre de deux points	35
II. Barycentre de n points	36
III. Coordonnées barycentriques dans le plan	39
IV. Exercices	40
4 Transformations vectorielles et affines	43
I. Isométries vectorielles	43
1. Classification des isométries vectorielles	43
2. Composition d'isométries	47
II. Similitudes vectorielles	48
III. Isométries affines	50
1. Application affine	51
2. Isométries affines	55
3. Déplacements	57
4. Anti-déplacements	57
5. Résumé des déplacements et anti-déplacements	59
IV. Similitudes affines	59
V. Grands théorèmes de la géométrie affine	61
1. Théorème de Thalès	61
2. Théorème de Ménélaüs	62
3. Théorème de Céva	62
VI. Exercices	63
1. Transformations vectorielles	63
2. Transformations affines	63
5 Courbes paramétrées en cartésiennes	67
I. Introduction	67
II. Réduction du domaine d'étude	69
III. Points multiples	70
IV. Tangentes et allures locales	71
1. Tangentes	71
2. Classification des allures locales	72
3. Recherche des inflexions	73
V. Branches infinies	74
VI. Plan d'étude	75
VII. Exercices	77
Annexes	78
A Mesure des angles orientés	80
I. Introduction	80
II. Bases directes et indirectes	81
III. Angles du plan	82
IV. Angles de l'espace	83

B Complément sur les barycentres	85
I. Coordonnées barycentriques et alignement de points	85
II. Barycentres et enveloppe convexe	86
C Isométries de l'espace	88
I. Isométries vectorielles de l'espace	88
1. Généralités sur les isométries vectorielles	88
2. Classification des isométries vectorielles	90
II. Isométries affines de l'espace	91
1. Généralités sur les isométries affines	91
2. Classification des isométries affines	92
D Courbes paramétrées en polaire	93
I. Coordonnées polaires	93
II. Tracé rapide	94
III. Exemples classiques	94
1. Droites	94
2. Cercles	94
IV. Réduction du domaine d'étude	95
V. Étude rapide	95
VI. Points multiples	96
VII. Tangentes et allures locales	96
1. Allure locale au pôle	96
2. Allure locale en dehors du pôle	96
VIII. Branches infinies	96
IX. Plan d'étude	97
E Coniques	99
I. Généralités	99
1. Définition	99
2. Sommets d'une conique	100
3. Axe de symétrie	100
4. Équation polaire	100
II. Paraboles	101
1. Équation réduite	101
2. Équation paramétrée	101
3. Tangentes	102
III. Ellipses	102
1. Équation réduite	102
2. Équation paramétrée	103
3. Définition bifocale	104
4. Tangentes	105
IV. Hyperboles	105
1. Équation réduite	105
2. Équation paramétrée	107
3. Définition bifocale	107
4. Tangentes	107
V. Réduction de l'équation d'une conique	108
1. Équation sans terme xy	108

2.	Équation sans x^2 et y^2	108
3.	Équation générale	109

Chapitre 1

Rappels

I. Le plan : bases et repères

On peut considérer le plan comme un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 ou comme un ensemble de points (espace affine). À deux points M et N, on associe le vecteur \overrightarrow{MN} et on note

$$M + \overrightarrow{MN} = N.$$

On a les propriétés suivantes :

$$\overrightarrow{MM} = \vec{0} \quad \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} \quad \overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN} \quad M - N = \overrightarrow{MN}.$$

1. Bases du plan

Soient deux vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 indépendants (non colinéaires du plan). Ils forment une base du plan : pour tout vecteur \vec{u} du plan, il existe deux réels uniques x et y tels que

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Les réels x et y sont appelés les coordonnées du vecteur \vec{u} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

On parle de base orthogonale lorsque \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont orthogonaux, de base orthonormée lorsqu'ils sont orthogonaux et de norme 1, et de base directe ou indirecte.

Exemple. Les vecteurs $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base du plan.

- Elle est orthogonale mais pas orthonormée
- Elle est indirecte.
- Quelles sont les coordonnées de $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette base?

On pose $\vec{w} = x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2$.

En résolvant le système, on obtient : $x = 2$ et $y = 1$.

- Soit $\vec{\omega}$ un vecteur de coordonnées (a, b) dans la base (\vec{i}, \vec{j}) et (A, B) dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) définis précédemment.

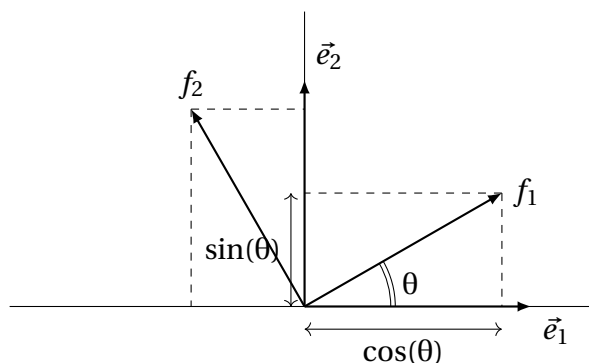
$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 \\ &= A(\vec{i} + \vec{j}) + B(\vec{i} - \vec{j}) \\ &= (A + B)\vec{i} + (A - B)\vec{j}\end{aligned}$$

Ainsi, par unicité des coordonnées :

$$\begin{cases} a = A + B \\ b = A - B \end{cases}$$

Exemple. Soient $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée directe (BOND) et $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ obtenue par rotation d'angle θ .

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_f$$



$$f_1 = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2.$$

En changeant θ par $\theta + \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$f_2 = -\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2$$

De même, en changeant θ par $-\theta$, on obtient :

$$\begin{cases} e_1 = \cos\theta\vec{f}_1 - \sin\theta\vec{f}_2 \\ e_2 = \sin\theta\vec{f}_1 + \cos\theta\vec{f}_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= X\vec{f}_1 + Y\vec{f}_2 \\ &= X(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) + Y(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) \\ &= (\cos\theta X - \sin\theta Y)\vec{e}_1 + (\sin\theta X + \cos\theta Y)\vec{e}_2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x = \cos\theta X - \sin\theta Y \\ y = \sin\theta X + \cos\theta Y \end{cases}$$

Point de vue matriciel :

Soit $\mathcal{P}_{e \rightarrow f} = \text{mat}(id, f, e) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{P}_{e \rightarrow f} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

2. Repères du plan et coordonnées

a. Coordonnées cartésiennes

On appelle repère cartésien du plan tout triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où O est un point du plan (appelé origine) et (\vec{e}_1, \vec{e}_2) une base du plan.

Il existe deux réels uniques x et y tels que

$$\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

x et y sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Remarque. . Plutôt que de donner les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , on donne parfois des points M et N , définissant ainsi implicitement les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{OM}$ et $\vec{e}_2 = \vec{ON}$. On peut donc parler du repère (O, M, N) .

. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

b. Nombres complexes

On identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 par l'isomorphisme $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x + iy \end{cases}$ Si M est un point de coordonnées (x, y) , et $a = x + iy$, on dit que a est l'affixe de M et M est l'image de a .

Intérêt : \mathbb{C} est un corps.

c. Coordonnées polaires

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé direct. Tout point M distinct de O est repérable par $\rho = OM$ et $\theta = (\vec{i}; \vec{OM})$.

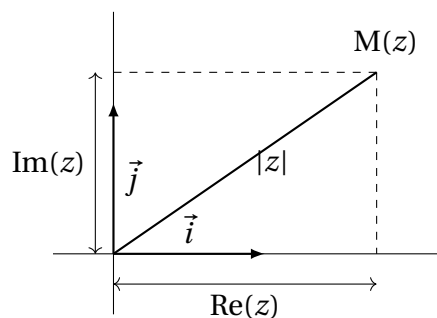
ρ est le module de M et θ un argument de M (θ est défini modulo 2π).

$$\begin{cases} \rho & = & \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta & = & \frac{y}{x} \text{ (si } x \neq 0 \text{)} \end{cases}$$

On a par exemple :

$$\begin{cases} \text{Si } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \text{Si } \theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[, \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \\ \text{Si } \theta \in]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi \end{cases}$$

Si M a pour coordonnées module ρ et pour argument θ , il a pour affixe $z = \rho e^{i\theta}$. On note $\rho = |z|$ (le module de z) et $\theta = \arg(z)$ (son argument)



Proposition 1.1

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes et n un entier naturel non nul. Alors :

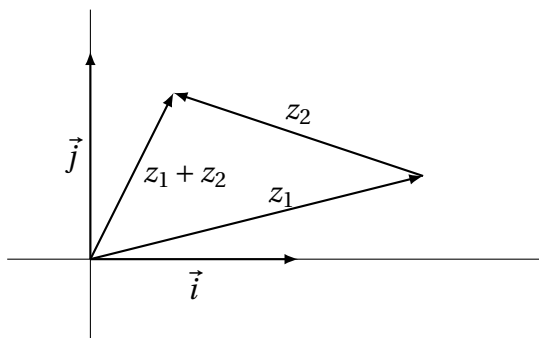
- $|\overline{z_1}| = |z_1|$
- $|-z_1| = |z_1|$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ (si $z_2 \neq 0$)
- $|z^n| = |z|^n$

Proposition 1.2 – Inégalité triangulaire

Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Remarque. Le nom de cette propriété est justifiée par le fait que si l'on considère trois vecteur d'affixes z_1, z_2 et $z_1 + z_2$, l'inégalité illustre l'inégalité classique entre les côtés d'un triangle.



Démonstration. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| &\iff (|z_1 + z_2|)^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \quad (\text{car la fonction carrée est strict. croiss. sur } \mathbb{R}^+) \\ &\iff |z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &\iff (z_1 + z_2) \times \overline{(z_1 + z_2)} \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &\iff z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &\iff |z_1|^2 + 2\text{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &\iff 2\text{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1||z_2| \\ &\iff \text{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1\overline{z_2}| \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est toujours vraie car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(z) \leq |z|$. □

Proposition 1.3

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

- $\arg(z) = 0 [2\pi] \iff z \in \mathbb{R}^+$.
- $\arg(z) = \pi [2\pi] \iff z \in \mathbb{R}^-$.
- $\arg(z) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff z \in i\mathbb{R}$ et $\text{Im}(z) > 0$.
- $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \iff z \in i\mathbb{R}$ et $\text{Im}(z) < 0$.

Proposition 1.4

Pour tout $z \in \mathbb{C}$.

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$

Proposition 1.5

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d .

- $\arg(b - a) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) [2\pi]$

Démonstration.

- Soit M le point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. L'affixe de ce vecteur est $b - a$. Ainsi,

$$\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg(b - a) [2\pi]$$

•

$$\arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) = \arg(d - c) - \arg(b - a) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \vec{i}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$$

□

3. Rappels sur les angles

- $(\vec{u}, \vec{u}) = \vec{0} [2\pi]$
- $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) [2\pi]$
- $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) [2\pi]$

Angle entre deux droites :

Soient D_1 et D_2 deux droites de vecteurs directeurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 . On pose $\theta = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) [2\pi]$ (dépend du choix des vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2). Comme on a les égalités d'angles suivantes :

- $(-\vec{u}_1, -\vec{u}_2) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) [2\pi]$
- $(\vec{u}_1, -\vec{u}_2) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) + \pi [2\pi]$
- $(-\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) + \pi [2\pi]$

Définition 1.1

L'angle θ , défini modulo π , est appelé angle orienté entre D_1 et D_2 et est noté $(D_1, D_2) [\pi]$.

Proposition 1.6**Formules d'Euler**

$$\begin{aligned} \cdot \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \cdot \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

Formule de Moivre

$$\cdot \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Formules d'addition

$$\begin{aligned} \cdot \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cdot \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \cdot \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \cdot \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \\ \cdot \tan(a+b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \\ \cdot \tan(a-b) &= \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2} \left(\cos(a-b) + \cos(a+b) \right) \\ \cdot \sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2} \left(\cos(a-b) - \cos(a+b) \right) \\ \cdot \sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2} \left(\sin(a-b) + \sin(a+b) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cdot \cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cdot \sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cdot \sin(p) - \sin(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

Formules de duplication

$$\begin{aligned} \cdot \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \cdot \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) \\ \cdot \tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)} \end{aligned}$$

Avec $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} \cdot \sin(\theta) &= \frac{2u}{1+u^2} \\ \cdot \cos(\theta) &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ \cdot \tan(\theta) &= \frac{2u}{1-u^2} \end{aligned}$$

II. Produit scalaire et déterminant

Soient \vec{u} d'affixe $a = r_1 e^{i\alpha}$ et \vec{v} d'affixe $b = r_2 e^{i\beta}$.

$$\bar{a}b = r_1 e^{-i\alpha} r_2 e^{i\beta} = r_1 r_2 e^{i\theta} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta + i \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta.$$

avec $\theta = \beta - \alpha = (\vec{u}, \vec{v})$.

1. Produit scalaire

Définition 1.2

On appelle produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} le réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Proposition 1.7

Soient \vec{u} d'affixe $a = r_1 e^{i\alpha}$ et \vec{v} d'affixe $b = r_2 e^{i\beta}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(\bar{a}b)$.

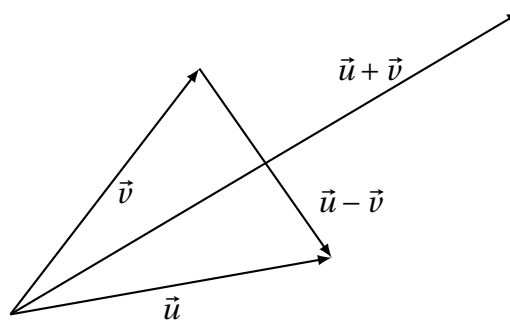
On déduit de l'expression complexe du produit scalaire les propriétés suivantes.

Proposition 1.8

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Proposition 1.9

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ (identité de polarisation)
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$ (identité du parallélogramme)



Proposition 1.10

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dont les coordonnées sont données dans une base orthonormée. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Proposition 1.11

Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Remarque. Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives a, b, c et d, alors :

$$(AB) \perp (CD) \iff \overline{(b-a)} \times (d-c) = 0$$

Exemple. Soit \vec{w} le projeté orthogonal de \vec{v} sur \vec{u} (non nul). On a :

$$\vec{w} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

En effet : en posant $\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ et \vec{j} tel que (\vec{i}, \vec{j}) soit une base orthonormée. On décompose \vec{v} dans cette base :

$$v = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j}.$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \lambda \vec{u} \cdot \vec{i} \\ &= \lambda \|\vec{u}\| \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|}$. Par conséquent, $\vec{w} = \lambda \vec{i} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$.

2. Déterminant**Définition 1.3**

On appelle déterminant de \vec{u} et \vec{v} le réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}).$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Remarque.

- Le déterminant est aussi appelé le produit mixte de \vec{u} et \vec{v} .
- Par cette formule, on voit que la notion d'angle entre deux vecteurs est intrinsèquement liée à celle de déterminant. Cette dernière dépend toutefois du choix d'une base. Il y a donc un choix « arbitraire » à effectuer lorsque l'on fixe une orientation pour les angles. On distingue pour cela les bases orthonormées en deux classes : celles dont le déterminant dans la base canonique est 1 (on dit que ce sont des bases directes) et celles dont le déterminant dans la base canonique est -1 (on dit que ce sont des bases indirectes). Le chapitre A en annexe apporte des précisions sur ce point.
- Pour une BOND (\vec{u}, \vec{v}) , on a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ et donc $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- Pour une BONI (\vec{u}, \vec{v}) , on a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ et donc $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- L'aire du parallélogramme formé sur \vec{u} et \vec{v} est $|\det(\vec{u}, \vec{v})|$.

Proposition 1.12

Soient \vec{u} d'affixe $a = r_1 e^{i\alpha}$ et \vec{v} d'affixe $b = r_2 e^{i\beta}$. Alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Im}(\bar{a}b)$.

On déduit de l'expression complexe du déterminant les propriétés suivantes.

Proposition 1.13

- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$
- $\det(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}, \vec{w}) + \beta\det(\vec{v}, \vec{w})$
- $\det(\vec{w}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\det(\vec{w}, \vec{u}) + \beta\det(\vec{w}, \vec{v})$

Proposition 1.14

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dont les coordonnées sont données dans une base orthonormée directe. Alors,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y.$$

Proposition 1.15

- Deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.
- Deux vecteurs forment une base du plan si, et seulement si, leur déterminant est non nul.

III. Groupes

1. Définitions

Définition 1.4

Soit E un ensemble. Une loi de composition interne sur E est une application $\star : E \times E \rightarrow E$. Pour désigner l'image d'un couple (x, y) , plutôt que d'utiliser la notation $\star(x, y)$, on note $x \star y$.

Exemple. La multiplication \times dans \mathbb{R} est une loi de composition interne sur \mathbb{R} .

Définition 1.5

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne \star . On dit que (G, \star) est un groupe lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\forall x, y, z \in G, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ (associativité)
2. $\exists e \in G, \forall x \in G, x \star e = e \star x = x$ (existence d'un élément neutre)
3. $\forall x \in G, \exists y \in G, x \star y = y \star x = e$ (existence d'un inverse)

Exemple. (\mathbb{R}^*, \times) est un groupe mais (\mathbb{R}, \times) n'est pas un groupe.

Proposition 1.16

Soit (G, \star) un groupe.

- L'élément neutre est unique.
- Chaque élément $x \in G$ possède un unique inverse (appelé aussi symétrique). On le note x^{-1} .
- Pour tout $x \in G$, $(x^{-1})^{-1} = x$

Définition 1.6 – Puissance

Soit (G, \cdot) un groupe et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $x \in G$, on note $x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ facteurs}}$.
- Par convention, pour tout $x \in G$, $x^0 = e$.
- Pour tout $x \in G$, $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$. Cet élément est noté x^{-n} .

Définition 1.7

Un groupe est dit commutatif (on dit aussi abélien) si :

$$\forall x, y \in G, x \star y = y \star x.$$

Remarque. Dans le cas d'un groupe commutatif, on privilégie souvent la notation additive $+$. On note alors 0 l'élément neutre et $-x$ l'inverse de x . De plus, on écrit nx au lieu de x^n .

Définition 1.8 – Ordre d'un groupe

L'ordre d'un groupe (G, \cdot) est le cardinal de G .

Définition 1.9 – Groupes produits

Soient (G, \star) et (H, Δ) deux groupes d'éléments neutres respectifs e_G et e_H . On munit le produit cartésien $G \times H$ de la loi de composition interne \wedge définie pour tout $(a, b), (c, d) \in G \times H$ par $(a, b) \wedge (c, d) = (a \star c, b \Delta d)$. Alors $(G \times H, \wedge)$ est un groupe d'élément neutre (e_G, e_H) . On l'appelle le groupe produit de G et de H .

2. Sous-groupes**Définition 1.10 – Sous-groupe**

Soit (G, \cdot) un groupe. On dit qu'un sous-ensemble H de G est un **sous-groupe** de G lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. L'ensemble H n'est pas vide.
2. Pour tous $x, y \in H$, $xy \in H$
3. Pour tous $x \in H$, $x^{-1} \in H$

Pour vérifier qu'un ensemble est un sous-groupe on peut rassembler les conditions 2 et 3 dans une seule condition :

Proposition 1.17

Soit $(G, .)$ un groupe et $H \subset G$. H est un sous-groupe de G si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. H contient l'élément neutre
2. $\forall x, y \in H, xy^{-1} \in H$

Théorème 1.18

Soit $(G, .)$ un groupe et H un sous groupe de G . La restriction à H de la loi de composition sur G fait de $(H, .)$ un groupe.

Proposition 1.19

Soit $(G, .)$ un groupe et \mathcal{H} un ensemble non vide de sous-groupes de G . L'intersection $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ est un sous-groupe de G .

3. Sous groupe engendré**Définition 1.11**

Soit $(G, .)$ un groupe et $A \subset G$ une partie non vide. On note \mathcal{H}_A l'ensemble des sous groupes de G contenant A ($\mathcal{H}_A \neq \emptyset$ car il contient G). On appelle **sous-groupe engendré** par A le sous groupe $\langle A \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A} H$.

4. Ordre d'un élément et ordre d'un sous-groupe**Définition 1.12**

Soit $(G, .)$ un groupe d'élément neutre e et $a \in G$.

- . S'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^m = e$, on dit que a est d'ordre fini égal à $n = \min\{m \in \mathbb{N}^* \mid a^m = e\}$.
- . Sinon, on dit que a est d'ordre infini.

Proposition 1.20

Soit $(G, .)$ un groupe d'élément neutre e et $a \in G$ d'ordre fini n . Alors

$$\langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{n-1}\} \text{ et } \text{Card}(\langle a \rangle) = n.$$

Théorème 1.21 – Lagrange

Soit G un groupe fini et H un sous groupe de G . Alors $\text{Card}(H)$ divise $\text{Card}(G)$. Autrement dit, l'ordre de H divise l'ordre de G .

Corollaire 1.22

Soit $(G, .)$ un groupe d'ordre fini n et d'élément neutre e . Pour tout $a \in G$, $a^n = e$.

5. Morphismes de groupes

Définition 1.13 – Morphisme

Soient (G_1, \star) et (G_2, Δ) deux groupes. Une application $f : G_1 \longrightarrow G_2$ est un **morphisme de groupes** si pour tous $x, y \in G_1$,

$$f(x \star y) = f(x) \Delta f(y).$$

Dans toute la suite, on considère (G_1, \star) et (G_2, Δ) deux groupes d'éléments neutres respectifs e_1 et e_2 . De plus, $f : G_1 \longrightarrow G_2$ désigne un morphisme de groupes.

Proposition 1.23

- $f(e_1) = e_2$
- $\forall x \in G_1, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Définition 1.14

On appelle **image** du morphisme $f : G_1 \longrightarrow G_2$ l'ensemble $Im(f) = f(G_1)$.

Définition 1.15

On appelle **noyau** du morphisme $f : G_1 \longrightarrow G_2$ l'ensemble

$$Ker(f) = f^{-1}(\{e_2\}) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\}.$$

Proposition 1.24

Soit $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes.
 f est injectif si, et seulement si, $Ker(f) = \{e_1\}$.

Proposition 1.25

Soit $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes.

- Le noyau de f est un sous-groupe de G_1 .
- L'image de f est un sous-groupe de G_2 .

Définition 1.16 – Isomorphisme

Soit $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes. Si f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme de groupes** et que les groupes G_1 et G_2 sont isomorphes.

6. Le cercle unité et le groupe des racines n^e dans \mathbb{C}

Définition 1.17

On appelle **cercle unité** et on note \mathbb{U} , l'ensemble des nombres complexes de module 1. On a donc :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Géométriquement, \mathbb{U} correspond au cercle de centre O et de rayon 1.

Proposition 1.26

(\mathbb{U}, \times) est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .

Remarque. $(\mathbb{U}, +)$ n'est pas un groupe car il ne contient pas d'élément neutre et \mathbb{U} n'est pas stable par addition.

Définition 1.18

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **racine n^e de l'unité** et on note \mathbb{U}_n l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$.

Proposition 1.27

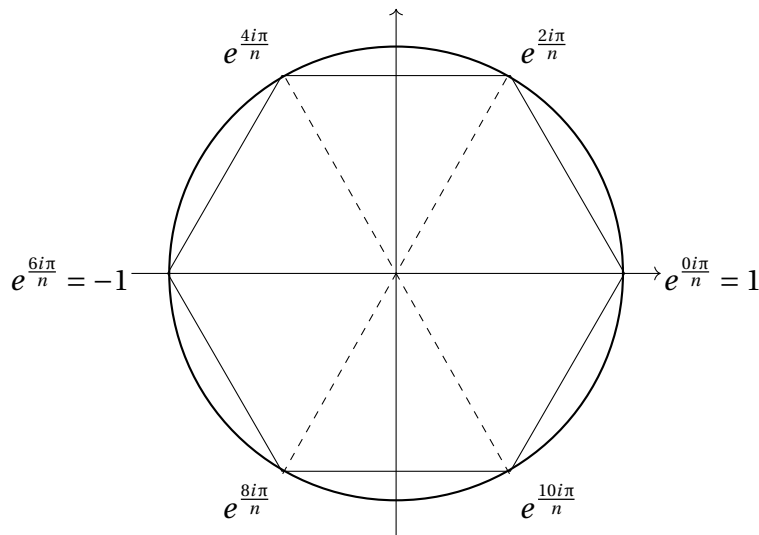
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- (\mathbb{U}_n, \times) est un sous-groupe de (\mathbb{U}, \times) .
- $\text{Card}(\mathbb{U}_n) = n$.
- $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1 \right\} = \langle e^{\frac{2i\pi}{n}} \rangle$.

Exemple.

- $\mathbb{U}_2 = \{1; -1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \{1; j; j^2\}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
- $\mathbb{U}_4 = \{1; i; -1; -i\}$

Remarque. Si $n \geq 3$, alors les points dont les affixes sont des racines n^e de l'unité forment un polygone régulier à n côtés. Par exemple, le dessin ci-dessous représente les racines de l'unité pour $n = 6$.



Proposition 1.28

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, (\mathbb{U}_n, \times) est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Démonstration. On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ Soit

$$\Phi: \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ \bar{k} & \longmapsto & w^k \end{cases}$$

Φ est bien définie car si $k \equiv k' \pmod{n}$, alors $w^k = w^{k'}$. Montrons que Φ est un morphisme :

Soient $\overline{k_1}, \overline{k_2} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$$\Phi(\overline{k_1 + k_2}) = \Phi(\overline{k_1 + k_2}) = w^{k_1+k_2} = w^{k_1} \times w^{k_2} = \Phi(\overline{k_1}) \times \Phi(\overline{k_2}).$$

De plus, Φ est injective car $\ker(\Phi) = \{\overline{0}\}$. En effet, soit $\overline{k} \in \ker(\Phi)$.

On a $\Phi(\overline{k}) = 1$

Donc $w^k = 1$

Donc $e^{\frac{2ki\pi}{n}} = 1$ Donc n divise k

Donc $\overline{k} = \overline{0} \pmod{n}$. On en déduit ainsi que $\ker(\Phi) = \{\overline{0}\}$.

Enfin, comme Φ est injective et que $\text{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \text{Card}(\mathbb{U}_n)$, on en déduit que Φ est bijective.

Finalement, Φ est bien un isomorphisme. □

IV. Exercices

Exercice 1.

Déterminer la forme exponentielle de :

$$e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Exercice 2.

Montrer que pour tous réels p et q ,

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Exercice 3.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Montrer que :

$$\begin{aligned} \cdot \sin(\theta) &= \frac{2u}{1+u^2} \\ \cdot \cos(\theta) &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ \cdot \tan(\theta) &= \frac{2u}{1-u^2} \end{aligned}$$

Méthode

Pour calculer une intégrale $I = \int_a^b f(t) dt$ où f est définie avec des fonctions trigonométriques :

- Si la fonction est une puissance de sin et de cos, on linéarise.
- Sinon, on essaye les règles de Bioche (avec $\omega(t) = f(t) dt$) :
 - Si $\omega(-t) = \omega(t)$, on pose $u = \cos(t)$
 - Si $\omega(\pi - t) = \omega(t)$, on pose $u = \sin(t)$
 - Si $\omega(\pi + t) = \omega(t)$, on pose $u = \tan(t)$
- Dans tous les autres cas, on pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

Exercice 4.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin^3(t) dt$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) \sin^2(t) dt$

3. $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\theta)} d\theta.$$

Exercice 5.

Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int \cos^5(t) dt$ sur \mathbb{R}
2. $\int \frac{1}{\cos^6(t)} dt$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
3. $\int \frac{1}{2 + \sin(t)} dt$ sur \mathbb{R}

Exercice 6.

Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 7.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

Exercice 8. Construction à la règle et au compas

Soit (O, I, J) un repère orthonormé et soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est constructible s'il est possible de construire, à la règle (non graduée) et au compas, un segment de longueur x à partir des points O, I et J .

Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ sont constructibles alors les nombres suivants sont constructibles :

$$x+y \quad x-y \quad xy \quad \frac{x}{y} \text{ (si } y \neq 0) \quad \sqrt{x} \text{ (si } x \geq 0)$$

Exercice 9. Construction du pentagone

1. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$
 - (a) Justifier que : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
 - (b) On pose $\Omega = \omega + \frac{1}{\omega}$.
Calculer $\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}$ en fonction de Ω .
 - (c) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
2. À partir du cercle trigonométrique tracé dans un repère orthonormé (O, I, J) , on construit les points suivants :
 - . I' le symétrique de I par rapport à O ;

- . M le milieu de $[OI']$;
- . N le point d'intersection du cercle de centre M et de rayon MJ avec l'axe des abscisses (N est le point d'intersection ayant une abscisse positive)
- . P le milieu de $[ON]$
- . A_1 le point d'intersection du cercle trigonométrique de la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par P (A_1 est le point d'intersection ayant une ordonnée positive).
- . On reporte successivement la distance A_1I sur le cercle afin d'obtenir les points A_2, A_3 et A_4 .

Justifier que $IA_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier.

Exercice 10.

$$\text{Soit } f : z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \longmapsto \frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $f(\mathbb{R}), f(\mathbb{U} \setminus \{i\}), f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$

Exercice 11.

On considère 1000 points distincts du plan.

1. Montrer qu'il est possible de tracer une droite D de sorte qu'il y ait 500 points de part et d'autre de D .
2. Montrer qu'on peut tracer un cercle de sorte qu'il y ait exactement 500 points à l'intérieur du cercle et 500 points à l'extérieur.

Exercice 12.

Calculer le périmètre et l'aire d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Exercice 13.

Quel est le plus grand nombre de points que l'on peut placer dans le disque unité ouvert de sorte que la distance entre deux points quelconques soit strictement supérieure à 1?

Exercice 14.

Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone régulier (avec $n \geq 6$). Montrer que :

$$A_1A_4^2 = A_1A_2^2 + A_1A_3 \times A_1A_5.$$

Exercice 15.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines n^e de l'unité.
2. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On note x_1, \dots, x_n ses racines dans \mathbb{C} (pas nécessairement toutes distinctes). On définit les fonctions symétriques élémentaires des racines de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{1 \leq k \leq n} x_k \\ \sigma_2 &= \sum_{1 \leq k < l \leq n} x_k x_l \\ &\vdots \\ \sigma_s &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq n} x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_s} \\ &\vdots \\ \sigma_n &= x_1 x_2 \dots x_n. \end{aligned}$$

Justifier que pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\sigma_k = (-1)^k \times \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

On n'attend pas nécessairement une preuve très rigoureuse ici.

3. Retrouver le résultat de la question 1 en utilisant le résultat de la question 2.

Exercice 16.

Sur le cercle trigonométrique, les points A et B sont repérés par $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$. Déterminez les points M du cercle tels que le triangle ABM soit isocèle.

Exercice 17. Théorème de Varignon

Soit ABCD un quadrilatère quelconque (non croisé). On note I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. Que peut-on dire du quadrilatère IJKL ?

Exercice 18.

Soit A, B, C, D quatre points du plan distincts. Montrer que

$$AB^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2 \iff (AC) \perp (BD)$$

Exercice 19.

Soient A_1, \dots, A_n des points du plan. Peut-on trouver n points B_1, \dots, B_n tels que A_1, \dots, A_n soient les milieux respectifs des segments $[B_1B_2], [B_2B_3], \dots, [B_nB_1]$?

Exercice 20.

Quelle est l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un carré de côté 1 ?

Exercice 21.

Soit ABC un triangle non rectangle. Montrer que

$$\tan(\hat{A}) + \tan(\hat{B}) + \tan(\hat{C}) = \tan(\hat{A}) \times \tan(\hat{B}) \times \tan(\hat{C})$$

Chapitre 2

Droites, triangles et cercles du plan

I. Droites

1. Équations cartésiennes et paramétrage

Remarque. Une droite du plan peut être donnée par :

- deux points distincts
- un point et un vecteur directeur
- un point et un vecteur normal
- un paramétrage
- une équation cartésienne (l'équation cartésienne d'une droite du plan est $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$)

2. Équation normale d'une droite

Proposition 2.1

Soit \mathcal{D} une droite ne passant pas par O. On note H le projeté orthogonal de O sur \mathcal{D} . Notons p la distance de O à H et $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{OH}\|} \vec{OH}$. On note de plus $\theta = (\vec{i}, \vec{n})$.

L'équation de \mathcal{D} est alors :

$$\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = p.$$

Démonstration. Soit $M(x; y)$. $\vec{n} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ et $\vec{HM} \begin{pmatrix} x - p \cos \theta \\ x - p \sin \theta \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \vec{n} \cdot \vec{HM} = 0 \\ &\iff x \cos \theta - p \cos^2 \theta + y \sin \theta - p \sin^2 \theta = 0 \\ &\iff x \cos \theta + y \sin \theta = p \end{aligned}$$

□

Remarque.

- Dans le cas où la droite \mathcal{D} passe par l'origine, elle admet tout de même une équation normale (avec $p = 0$).
- L'équation normale a l'avantage d'être unique et de ne faire intervenir que deux paramètres (θ, p) contre trois (a, b, c) pour une équation cartésienne générale.

3. Équation complexe

Exemple. Déterminer l'équation complexe de la droite (AB) avec $A(i)$ et $B(2)$. Soit $M(z)$.

$$\begin{aligned}
 M \in (AB) &\iff \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0 \\
 &\iff \overline{(2-i)}(z-i) \in \mathbb{R} \\
 &\iff (2+i)z - 1 - 2i \in \mathbb{R} \\
 &\iff (2+i)z - 1 - 2i = \overline{(2+i)z - 1 - 2i} \\
 &\iff (2+i)z - (2-i)\bar{z} - 4i = 0
 \end{aligned}$$

4. Distance d'un point à une droite**Proposition 2.2**

Soit \mathcal{D} une droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et soit $A(x_0, y_0)$ un point du plan. Alors

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Démonstration. Soit $H(x, y)$ le projeté orthogonal de A sur D .

On a $ax + by = -c$ car $H \in D$.

Par ailleurs, un vecteur normal de D est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ donc

$$|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = |a(x - x_0) + b(y - y_0)| = |-c - ax_0 - by_0| = |ax_0 + by_0 + c|$$

De plus,

$$|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\| = AH\sqrt{a^2 + b^2}$$

On obtient bien :

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□

Remarque. L'ensemble des points à égale distance de deux droites non parallèles \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 est la réunion des bissectrices de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Les deux bissectrices sont perpendiculaires.

Exemple. Déterminer les bissectrices des droites $\mathcal{D}_1 : x + y = 2$ et $\mathcal{D}_2 : 2x - y = 1$.

Solution :

Soit $H(x_0, y_0)$

$$d(H, \mathcal{D}_1) = \frac{|x_0 + y_0 - 2|}{\sqrt{2}}$$

et $d(H, \mathcal{D}_2) = \frac{|2x_0 - y_0 - 1|}{\sqrt{5}}$.

Ainsi,

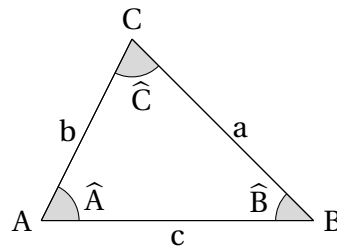
$$\begin{aligned}
 d(H, \mathcal{D}_1) = d(H, \mathcal{D}_2) &\iff \frac{|x_0 + y_0 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2x_0 - y_0 - 1|}{\sqrt{5}} \\
 &\iff \begin{cases} \frac{x_0 + y_0 - 2}{\sqrt{2}} = \frac{2x_0 - y_0 - 1}{\sqrt{5}} \\ \text{ou} \\ \frac{x_0 + y_0 - 2}{\sqrt{2}} = -\frac{2x_0 - y_0 - 1}{\sqrt{5}} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (\sqrt{5} - 2\sqrt{2})x_0 + (\sqrt{5} + \sqrt{2})y_0 - 2\sqrt{5} + \sqrt{2} = 0 \\ \text{ou} \\ (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})x_0 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})y_0 - 2\sqrt{5} - \sqrt{2} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les deux dernières équations obtenues sont les équations des bissectrices cherchées.

II. Triangles

Dans toute cette partie, on utilisera les notations suivantes :

$AB = c, AC = b, BC = a, \widehat{BAC} = \hat{A}, \widehat{ABC} = \hat{B}$ et $\widehat{ACB} = \hat{C}$.



1. Relations dans le triangle

Proposition 2.3 – Formule d’Al-Kashi

Pour tout triangle ABC,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 a^2 = BC^2 = \|\vec{BC}\|^2 &= \|(\vec{BA} + \vec{AC})\|^2 \\
 &= \|\vec{BA}\|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} + \|\vec{AC}\|^2 \\
 &= \|\vec{BA}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} \\
 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})
 \end{aligned}$$

(en utilisant la formule trigonométrique du produit scalaire).

□

Proposition 2.4 – Loi des sinus

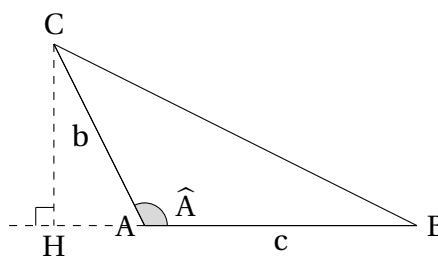
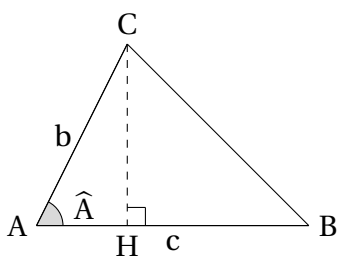
Pour tout triangle ABC,

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}.$$

Démonstration.

On décompose la preuve en deux étapes.

- **Étape 1** : on prouve que si \mathcal{S} est l'aire du triangle ABC, alors $\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc \sin(\widehat{A})$.
En fait, on sait que si H est le projeté orthogonal de C sur [AB], alors $\mathcal{S} = \frac{1}{2}AB \times HC$.
Or, si \widehat{A} est un angle aigu, $HC = AC \sin(\widehat{A})$
et si \widehat{A} est un angle obtus, $HC = AC \sin(\pi - \widehat{A}) = AC \sin(\widehat{A})$ (voir les figures ci-dessous).



Ainsi, dans tous les cas, $\mathcal{S} = \frac{1}{2}AB \times AC \sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}bc \sin(\widehat{A})$.

- **Étape 2** : On en déduit la loi des sinus.
D'après l'étape 1, on peut écrire que $\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc \sin(\widehat{A})$ mais aussi, par une démonstration similaire, que $\mathcal{S} = \frac{1}{2}ac \sin(\widehat{B})$ et que $\mathcal{S} = \frac{1}{2}ab \sin(\widehat{C})$. Ainsi, ces trois formules permettent d'écrire que

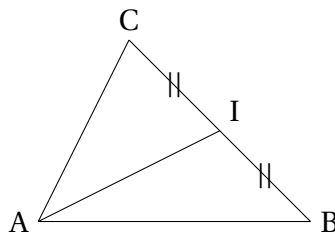
$$\frac{abc}{2\mathcal{S}} = \frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}.$$

□

2. Médiannes et centre de gravité**Proposition 2.5 – Théorème de la médiane**

Pour tout triangle ABC, si I est le milieu de [BC] alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2.$$



Démonstration.

$$\begin{aligned}
 AB^2 + AC^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 \\
 &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 \\
 &= \overrightarrow{AI}^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{AI}^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}^2 \\
 &= 2\overrightarrow{AI}^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2 \\
 &= 2\overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2 \quad (\text{car } \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}) \\
 &= 2AI^2 + 2IB^2 \quad (\text{car } IB = IC)
 \end{aligned}$$

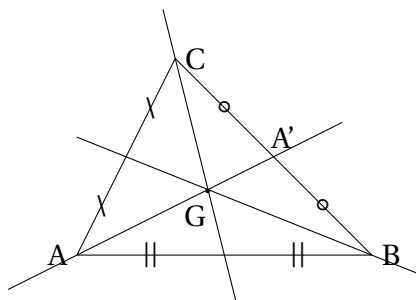
□

Remarque. En utilisant la même méthode et en faisant apparaître le point I à l'aide de la relation de Chasles, on peut également montrer que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4} \quad \text{et que} \quad AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CB}$$

Proposition 2.6

Dans un triangle ABC , les trois médianes sont concourantes. Leur point d'intersection est le centre de gravité du triangle. De plus, si A' est le milieu de $[BC]$, on a $AG = \frac{2}{3}AA'$.



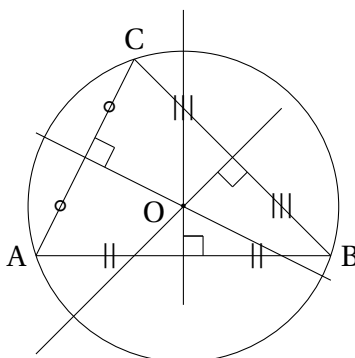
Démonstration. Voir chapitre sur les barycentres.

□

3. Médiatrices et cercle circonscrit

Proposition 2.7

Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est le centre du cercle circonscrit au triangle.



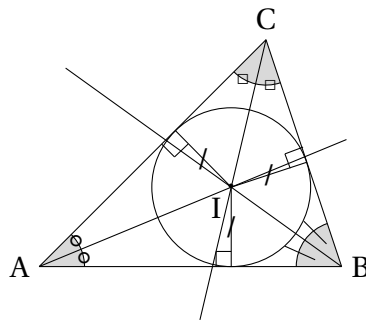
Remarque. On utilise le fait que la médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $MA=MB$. La preuve de ce résultat est laissée en exercice.

Démonstration. Soit ABC un triangle. Soient O le point d'intersection des médiatrices des côtés $[AB]$ et $[AC]$ (il existe car les médiatrices ne sont pas parallèles). Alors $OA=OB$ et $OA=OC$. On en déduit donc que $OB=OC$ et donc que O est un point de la médiatrice du segment $[BC]$. Par conséquent, les trois médiatrices sont concourantes en O . □

4. Bissectrices et cercle inscrit

Proposition 2.8

Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est le centre du cercle inscrit au triangle.



Démonstration. On utilise le fait que les bissectrices sont les lieux des points équidistants des côtés du triangle.

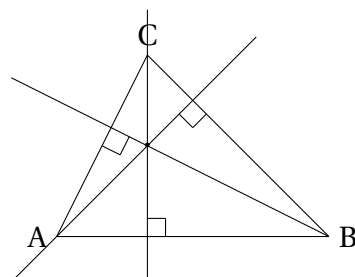
Soit ABC un triangle. Soit I le point d'intersection des bissectrices des angles \hat{A} et \hat{B} . On en déduit que $d(I, (AB)) = d(I, (BC)) = d(I, (AC))$ et donc que I appartient à la bissectrice de l'angle \hat{C} . Par conséquent, les trois bissectrices du triangle sont concourantes en I . □

5. Hauteurs

Proposition 2.9

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est appelé l'orthocentre du triangle.

Démonstration. Laisée en exercice. □



III. Cercles

1. Équations de cercles

Définition 2.1

On appelle cercle de centre O et de rayon r , noté $\mathcal{C}_{(O,r)}$ l'ensemble des points M du plan tels que $OM = r$.

Proposition 2.10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Une équation cartésienne du cercle de centre $O(a; b)$ et de rayon r est :

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_{(O,r)} \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Démonstration. Cela vient directement du fait que

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_{(O,r)} \iff \|\overrightarrow{OM}\|^2 = r^2$$

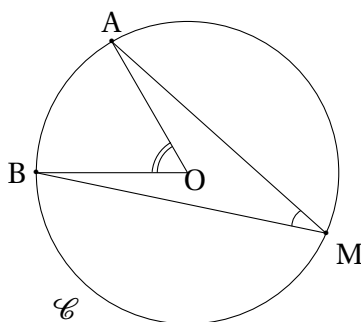
□

2. Angles au centre et angles inscrit

Théorème 2.11 – Théorème de l'angle au centre

Soit \mathcal{C} un cercle de centre O . Soient A et B deux points de \mathcal{C} et soit M un point du plan.

$$M \in \mathcal{C} \iff (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) [2\pi].$$



Démonstration. Supposons que $M \in \mathcal{C}$.

D'après la relation de Chasles pour les angles :

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OB}) [2\pi]$$

Or, comme les triangles OAM et OBM sont isocèles en O , on sait que $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) \equiv \pi - 2(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MA}) [2\pi]$ et que $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OB}) \equiv \pi - 2(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MO}) [2\pi]$.

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} (\vec{OA}; \vec{OB}) &\equiv 2\pi - 2 \left((\vec{MB}; \vec{MO}) + (\vec{MO}; \vec{MA}) \right) [2\pi] \\ &\equiv -2 (\vec{MB}; \vec{MA}) [2\pi] \quad (\text{d'après la relation de Chasles}) \\ &\equiv 2 (\vec{MA}; \vec{MB}) [2\pi] \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que M est un point du plan tel que $(\vec{OA}; \vec{OB}) \equiv 2 (\vec{MA}; \vec{MB}) [2\pi]$.

On va montrer que $M \in \mathcal{C}$. Notons pour cela O' le centre du cercle circonscrit au triangle MAB. Il suffit alors de montrer que $O = O'$.

En fait, d'après ce que nous avons prouvé précédemment, on sait que :

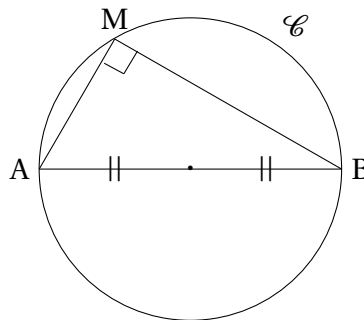
$$\begin{aligned} (\vec{O'A}; \vec{O'B}) &\equiv 2 (\vec{MA}; \vec{MB}) [2\pi] \\ &\equiv (\vec{OA}; \vec{OB}) \end{aligned}$$

Ainsi, comme les triangles OAB et O'AB sont isocèles respectivement en O et O', qu'ils ont même base et même angle au sommet, on en déduit que $O=O'$. Le point M est donc bien sur le cercle \mathcal{C} . □

Corollaire 2.12

Soit \mathcal{C} un cercle de diamètre [AB] et soit M un point du plan.

$$M \in \mathcal{C} \iff (\vec{MA}; \vec{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

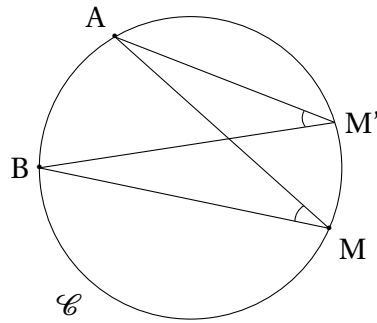


Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1 et de voir que si O est le centre du cercle, $(\vec{OA}; \vec{OB}) \equiv \pi [2\pi]$. □

Corollaire 2.13 – Théorème des angles inscrits

Soit ABM un triangle non plat et \mathcal{C} son cercle circonscrit. Soit M' un point du plan distinct de A et de B.

$$M' \in \mathcal{C} \iff (\vec{M'A}; \vec{M'B}) \equiv (\vec{MA}; \vec{MB}) [\pi].$$



Démonstration. En notant O le centre du cercle circonscrit, et d'après le théorème 1 :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff (\vec{OA}; \vec{OB}) \equiv 2 (\vec{MA}; \vec{MB}) [2\pi] \\ &\iff 2 (\vec{M'A}; \vec{M'B}) \equiv 2 (\vec{MA}; \vec{MB}) [2\pi] \\ &\iff (\vec{M'A}; \vec{M'B}) \equiv (\vec{MA}; \vec{MB}) [\pi] \end{aligned}$$

□

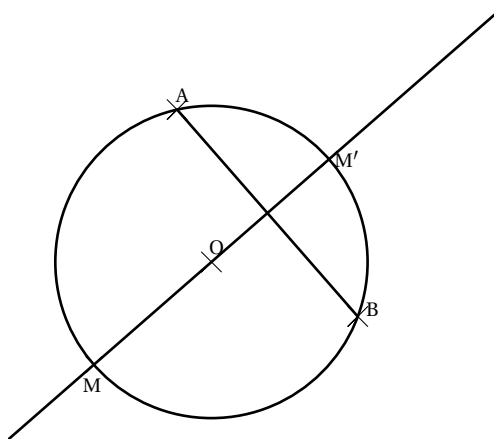
Remarque. Il est possible de préciser le Théorème des angles inscrits (Corollaire 2.13). Les points A et B définissent deux arcs de cercle. Si M et M' sont situés sur le même arc de cercle, on a $(\vec{M'A}; \vec{M'B}) \equiv (\vec{MA}; \vec{MB}) [2\pi]$. et dans le cas contraire, $(\vec{M'A}; \vec{M'B}) \equiv (\vec{MA}; \vec{MB}) + \pi [2\pi]$.

Pour le justifier, on peut utiliser un argument de continuité. Supposons que l'on ait fixé deux points A et B sur le cercle. Soit $M_0 \in \mathcal{C}$, avec $M \neq A$ et $M \neq B$. On pose $\alpha = (\vec{MA}; \vec{MB}) [2\pi]$. On note \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les deux arcs de cercles ainsi définis (ces arcs de cercles ne contiennent ni A, ni B et $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$). On définit ensuite l'application suivante :

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{C} \setminus \{A, B\} & \longrightarrow \{\alpha; \alpha + \pi\} \\ M & \longrightarrow (\vec{MA}; \vec{MB}) \end{cases}$$

D'après le Théorème des angles inscrits, cette application est bien définie. De plus, Φ est continue. Elle est donc constante sur \mathcal{C}_1 et constante sur \mathcal{C}_2 .

Enfin, la configuration suivante, où $[MM']$ est un diamètre du cercle perpendiculaire à $[AB]$, permet de montrer que la valeur prise par Φ sur \mathcal{C}_1 est différente de celle prise sur \mathcal{C}_2 .



Corollaire 2.14

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. Les points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si, et seulement, si

$$\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}\right) [\pi].$$

3. Birapport et cocyclicité

Définition 2.2

Soient a, b, c et d quatre nombres complexes deux à deux distincts. On appelle birapport du quadruplet (a, b, c, d) le complexe :

$$[a, b, c, d] = \frac{a-c}{a-d} / \frac{b-c}{b-d}.$$

Théorème 2.15

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c et d . Les points sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} [a, b, c, d] \in \mathbb{R} &\iff \frac{a-c}{a-d} / \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R} \\ &\iff \arg\left(\frac{a-c}{a-d} / \frac{b-c}{b-d}\right) \equiv 0 [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{a-c}{a-d}\right) - \arg\left(\frac{b-c}{b-d}\right) \equiv 0 [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{a-c}{a-d}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-c}{b-d}\right) [\pi] \\ &\iff \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}\right) [\pi] \\ &\iff A, B, C \text{ et } D \text{ sont cocycliques ou alignés (d'après le corollaire 2.14)} \end{aligned}$$

□

Théorème 2.16 – Miquel

Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et \mathcal{C}_4 quatre cercles. On suppose que \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 se coupent en A_1 et B_1 , que \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 se coupent en A_2 et B_2 , que \mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_4 se coupent en A_3 et B_3 et que \mathcal{C}_4 et \mathcal{C}_1 se coupent en A_4 et B_4 . On suppose de plus que les huit points d'intersection obtenus sont deux à deux distincts.

Les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, B_1, B_2, B_3 et B_4 sont cocycliques ou alignés.

Démonstration. Laisée en exercice.

□

IV. Exercices

Exercice 1.

Déterminer :

1. Une équation cartésienne de la droite passant par A(1, 1) et de vecteur directeur $\vec{v}(2 \ 5)$
2. Une équation cartésienne de la droite passant par A(1, 1) et B(2, 4)
3. Une équation cartésienne de la droite passant par A(1, 1) et de vecteur normal $\vec{u}(3, 1)$
4. Un paramétrage de la droite passant par A(1, 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(3, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3, 1)$
5. Une équation cartésienne de la droite de paramétrage $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$
6. Soit \mathcal{D} la droite d'équation $2x + y + 1 = 0$. Donner deux points de \mathcal{D} , un vecteur directeur, un vecteur normal et un paramétrage.
7. Une équation normale de la droite passant par A(2, 1) et B(3, -1).
8. une équation complexe passant par les points A(1 + i) et B(1 - i).
9. une équation complexe de la droite d'équation D : $x + 3y - 5 = 0$.

Exercice 2.

Déterminer les bissectrices des droites $D_1 : x + 2y - 4 = 0$ et $D_2 : 3x + y + 5 = 0$.

Exercice 3.

Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Indication : on pourra considérer les droites parallèles à un côté du triangle et passant par le sommet opposé puis utiliser le fait que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Exercice 4.

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère les points A(2;3),

B(-1;5) et C(4;1). Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C sur (AB).

Exercice 5.

Montrer que trois droites du plan dont les équations cartésiennes sont $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ et $a''x + b''y + c'' = 0$, sont concourantes ou parallèles si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 6.

Soit A(0, 0), B(1, 4) et C(2, 3).

1. Déterminer le centre de gravité de ABC.
2. Déterminer l'orthocentre de ABC.
3. Déterminer une équation du cercle circonscrit à ABC.
4. Déterminer une équation du cercle inscrit à ABC.

Exercice 7.

Déterminer l'ensemble des centres des cercles qui passent par le point A(1, 0) et qui possèdent deux tangentes perpendiculaires qui se coupent en O.

Exercice 8. Triangles isométriques et triangles semblables

On dit que deux triangles sont isométriques si les longueurs de leurs côtés sont égales deux à deux. On dit que deux triangles sont semblables si leurs angles sont égaux deux à deux.

1. Montrer que deux triangles isométriques sont semblables.
2. Montrer que si deux triangles ont un même angle compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont isométriques.

3. Montrer que si deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement égaux, alors ils sont isométriques.
4. Montrer que deux triangles sont semblables si, et seulement si, leurs côtés sont proportionnels.
5. Montrer que deux triangles sont semblables si deux côtés de l'un sont proportionnels à deux côtés de l'autre et si les angles entre ces deux côtés sont égaux.
6. Montrer que deux triangles sont semblables si, et seulement si, deux côtés de l'un sont proportionnels à deux côtés de l'autre et si les angles opposés aux plus grands des deux côtés proportionnels sont égaux

Exercice 9. Vrai ou faux?

1. La médiatrice de l'hypothénuse d'un triangle rectangle passe par le sommet opposé à l'hypothénuse.
2. La somme des quatres angles d'un quadrilatère non croisé est égale à 360° .
3. Soit ABCD un quadrilatère. ABCD admet un cercle circonscrit si, et seulement si, $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$.
4. Soit ABC un triangle et O le centre du cercle circonscrit. On a :

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{A}$$

5. Soit ABC un triangle et I le centre du cercle inscrit. On a :

$$\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{A}$$

Exercice 10.

1. Montrer que, dans tout triangle, les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés appartiennent au cercle circonscrit au triangle.

2. Montrer de plus que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux milieux des côtés appartiennent aussi au cercle circonscrit au triangle.

Exercice 11.

Dans un repère orthonormé, existe-t-il un triangle équilatéral dont les coordonnées des sommets sont des nombres entiers?

Exercice 12.

Soit ABC un triangle. Le cercle \mathcal{C} (resp. \mathcal{C}_0) de diamètre [BC] (resp. [CA]) coupe la droite (CA) (resp. la droite (BC)) en P (resp. Q). Les cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}_0 se recoupent en un second point R. Montrer que (CR), (BP) et (AQ) sont concourantes.

Exercice 13.

1. Soit \mathcal{C} un cercle et M un point à l'extérieur de \mathcal{C} . Montrer que si (MT_1) et (MT_2) sont les deux tangentes à \mathcal{C} passant par M (avec T_1 et T_2 deux points de \mathcal{C}), on a $MT_1 = MT_2$.
2. **Théorème de Pitot**
Montrer que si ABCD est un quadrilatère qui admette un cercle inscrit, alors

$$AB + CD = BC + AD$$

3. Soit ABC un triangle et $A' \in [BC]$ le point de tangence du cercle inscrit à ABC avec le côté [BC]. Montrer que

$$A'B = \frac{a - b + c}{2}$$

Exercice 14. Formule de Héron

Soit ABC un triangle. On note $s = \frac{a + b + c}{2}$ le demi-périmètre du triangle. Montrer que l'aire de ABC est (formule de Héron) :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

Exercice 15. Droite d'Euler

Montrer que dans tout triangle ABC, le centre de gravité G, l'orthocentre H et le centre du cercle circonscrit O sont alignés.

Exercice 16. Théorème corde-tangente

Soit ABC un triangle dont le cercle circonscrit est \mathcal{C} . Soit T la tangente à \mathcal{C} en A . Montrer que \widehat{C} est égal à un angle entre (AB) et T .

Exercice 17. Cercle d'Apollonius

Soient A et B deux points du plan. Soit $k > 0$. Déterminer le lieu des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

Exercice 18. Théorème de Ptolémée

Soient quatre points distincts A, B, C, D formant (dans cet ordre) un polygone convexe. Montrer qu'ils sont cocycliques si, et seule-

ment si,

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$$

Exercice 19. Théorème de Miquel

Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et \mathcal{C}_4 quatre cercles. On suppose que \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 se coupent en A_1 et B_1 , que \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 se coupent en A_2 et B_2 , que \mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_4 se coupent en A_3 et B_3 et que \mathcal{C}_4 et \mathcal{C}_1 se coupent en A_4 et B_4 . On suppose de plus que les huit points d'intersection obtenus sont deux à deux distincts.

Montrer que les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, B_1, B_2, B_3 et B_4 sont cocycliques ou alignés.

Chapitre 3

Barycentres

I. Barycentre de deux points

Définition 3.1

Soient A et B deux points, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Alors il existe un unique point G tel que $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$.

Le point G est appelé le **barycentre des points pondérés** (A, α) et (B, β).

Démonstration. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soient A et B deux points.

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0} \iff \alpha \vec{GA} + \beta (\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0} \quad (3.1)$$

$$\iff (\alpha + \beta) \vec{GA} + \beta \vec{AB} = \vec{0} \quad (3.2)$$

$$\iff \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB} \quad (\text{car } \alpha + \beta \neq 0) \quad (3.3)$$

Or il existe effectivement un unique point G défini par la dernière égalité. \square

Remarque. Le barycentre G est aussi l'unique point tel que $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$. Par conséquent, $G \in (AB)$. De plus, $G \in [AB]$ ssi α et β sont de même signe.



G : barycentre de (A, 3) et (B, 2)

Proposition 3.1 – Homogénéité

Si G est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), alors pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, G est aussi le barycentre de (A, $k\alpha$) et (B, $k\beta$).

Démonstration.

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff k\alpha \overrightarrow{GA} + k\beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

□

Remarque. Lorsque $\alpha = \beta \neq 0$, on dit que G est l'isobarycentre de (A, α) et (B, β) . C'est aussi le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$. On a donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et G est donc le milieu de $[AB]$.

Proposition 3.2

Si G est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) , alors pour tout point M ,

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MB}.$$

Démonstration. Soit M un point du plan et G le barycentre des points (A, α) et (B, β) . Alors,

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Donc

$$\alpha (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + \beta (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$$

Ainsi,

$$(\alpha + \beta) \overrightarrow{GM} = -\alpha \overrightarrow{MA} - \beta \overrightarrow{MB}$$

et on obtient :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MB}.$$

□

Remarque. Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta = 1$, on note $G = \alpha A + \beta B$.

II. Barycentre de n points

Définition 3.2

Soient $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ un ensemble de n points pondérés tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Il existe un unique point G vérifiant l'égalité

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$.

Démonstration. On montre, comme dans le cas $n = 2$ que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \iff \overrightarrow{A_1 G} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \overrightarrow{A_1 A_i}$$

Laissée en exercice.

□

Proposition 3.3 – Homogénéité

Si G est le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$, alors pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, G est aussi le barycentre de $(A_1, k\alpha_1), \dots, (A_n, k\alpha_n)$.

Remarque. Lorsque tous les α_i sont égaux on parle d'isobarycentre des points A_1, \dots, A_n . L'isobarycentre de trois points A, B et C est appelé le centre de gravité du triangle ABC .

Proposition 3.4

Si G est le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$, alors pour tout point M ,

$$\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \overrightarrow{MA_i}$$

Démonstration. Soit G le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ et soit M un point du plan.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_i}) = \vec{0}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GM} = - \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

Donc

$$\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \overrightarrow{MA_i}$$

□

Remarque.

- De la même manière qu'avec deux points, si $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, on note

$$G = \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k$$

- En appliquant la Proposition 3.4 avec $M = O$ (l'origine du repère), on voit que les coordonnées de G se calculent en faisant la moyenne pondérée des coordonnées des A_i .

Proposition 3.5 – Associativité

Soient des réels

$$\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,k_1}, \alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{2,k_2}, \dots, \alpha_{r,1}, \dots, \alpha_{r,k_r}$$

tels que $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} \neq 0$ et tels que pour tout i , $\sum_j \alpha_{i,j} \neq 0$. Soit G le barycentre des points pondérés

$$(A_{1,1}, \alpha_{1,1}), \dots, (A_{1,k_1}, \alpha_{1,k_1}), \dots, (A_{r,1}, \alpha_{r,1}), \dots, (A_{r,k_r}, \alpha_{r,k_r})$$

Pour tout $1 \leq i \leq r$, on note B_i le barycentre des points pondérés

$$(A_{i,1}, \alpha_{i,1}), \dots, (A_{i,k_i}, \alpha_{i,k_i}).$$

Alors G est également le barycentre des points pondérés

$$\left(B_1, \sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{1,j} \right), \dots, \left(B_r, \sum_{j=1}^{k_r} \alpha_{r,j} \right).$$

Démonstration. Soit G le barycentre des points pondérés

$$(A_{1,1}, \alpha_{1,1}), \dots, (A_{1,k_1}, \alpha_{1,k_1}), \dots, (A_{r,1}, \alpha_{r,1}), \dots, (A_{r,k_r}, \alpha_{r,k_r})$$

On a

$$\alpha_{1,1} \overrightarrow{GA_{1,1}} + \dots + \alpha_{1,k_1} \overrightarrow{GA_{1,k_1}} + \dots + \alpha_{r,1} \overrightarrow{GA_{r,1}} + \dots + \alpha_{r,k_r} \overrightarrow{GA_{r,k_r}} = \vec{0}$$

On regroupe les vecteurs correspondant à chaque B_i ensembles en factorisant par $\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}$:

$$\left(\sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{1,j} \right) \left(\frac{\alpha_{1,1}}{\sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{1,j}} \overrightarrow{GA_{1,1}} + \dots + \frac{\alpha_{1,k_1}}{\sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{1,j}} \overrightarrow{GA_{1,k_1}} \right) + \dots + \left(\sum_{j=1}^{k_r} \alpha_{r,j} \right) \left(\frac{\alpha_{r,1}}{\sum_{j=1}^{k_r} \alpha_{r,j}} \overrightarrow{GA_{r,1}} + \dots + \frac{\alpha_{r,k_r}}{\sum_{j=1}^{k_r} \alpha_{r,j}} \overrightarrow{GA_{r,k_r}} \right)$$

Or comme les points B_i sont les barycentres respectifs des points pondérés $(A_{i,1}, \alpha_{i,1}), \dots, (A_{i,k_i}, \alpha_{i,k_i})$, on obtient (d'après la Proposition 3.4 appliquée à $M = G$) :

$$\sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{1,j} \overrightarrow{GB_1} + \dots + \sum_{j=1}^{k_r} \alpha_{r,j} \overrightarrow{GB_r} = \vec{0}$$

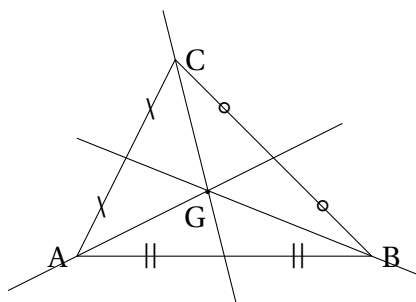
□

Corollaire 3.6

Dans un triangle ABC, les trois médianes sont concourantes. Leur point d'intersection est le centre de gravité du triangle. De plus, si A' est le milieu de $[BC]$, on a $AG = \frac{2}{3}AA'$.

Démonstration. Laissez en exercice.

□



III. Coordonnées barycentriques dans le plan

Proposition 3.7

Soient A, B et C trois points du plan distincts et non alignés. Pour tout point M , il existe un triplet (α, β, γ) tels que M soit le barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) .

Démonstration. A, B et C sont trois points du plan distincts et non alignés donc $(A; B, C)$ définit un repère du plan. Ainsi, pour tout point M , il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

Par conséquent,

$$\overrightarrow{AM} = \alpha (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + \beta (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}).$$

Finalement, on obtient :

$$(1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{MA} + \alpha \overrightarrow{MB} + \beta \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

La proposition s'obtient ainsi avec $\alpha = 1 - \alpha - \beta$, $\beta = \alpha$ et $\gamma = \beta$ (on a bien $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$). \square

Définition 3.3

Avec les notations de la proposition 3.7, le triplet (α, β, γ) est appelé un système de coordonnées barycentrique de M relativement à A, B et C .

Remarque. Les coordonnées barycentriques ne sont pas définies de manière unique mais seulement à un coefficient multiplicateur non nul près. Elles peuvent être définies de manière unique en fixant la somme des coordonnées à 1 : de telles coordonnées sont dites normalisées.

Remarque. Si M a pour coordonnées barycentriques (α, β, γ) relativement à A, B et C (avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$), on peut noter

$$M = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

On a par exemple

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$$

ce qui signifie que M a pour coordonnées (β, γ) dans le repère (A, B, C) .

Inversement, si M a pour coordonnées (x, y) dans le repère (A, B, C) , on a :

$$\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$$

Donc

$$M = (1 - x - y)A + xB + yC$$

et les coordonnées barycentriques de M relativement à A, B et C sont donc $(1 - x - y, x, y)$.

Proposition 3.8

Soit ABC un triangle non plat et M un point du plan. Un système de coordonnées barycentriques de M est le triplet (α, β, γ) avec

$$\alpha = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \quad \beta = \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \quad \gamma = \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}).$$

Démonstration. Soit M un point du plan et (α, β, γ) un système de coordonnées barycentriques de M. M est le barycentre des points (A, α) , (B, β) et (C, γ) . On a, par définition,

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Par conséquent, on a les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \det(\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}) = 0 \\ \det(\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MB}) = 0 \\ \det(\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MC}) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, le déterminant étant multilinéaire et alterné, on a :

$$\begin{cases} \beta \det(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) + \gamma \det(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}) = 0 \\ \alpha \det(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) + \gamma \det(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MB}) = 0 \\ \alpha \det(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MC}) + \beta \det(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MC}) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que, à un coefficient multiplicateur non nul près, on a :

$$\alpha = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \quad \beta = \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \quad \gamma = \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}).$$

□

Remarque. Avec les notations de la Proposition 3.8, on a

$$\alpha + \beta + \gamma = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Les coordonnées barycentriques normalisées s'interprètent comme des rapports d'aires algébriques

$$\frac{\text{Aire}(\text{MBC})}{\text{Aire}(\text{ABC})} \quad \frac{\text{Aire}(\text{AMC})}{\text{Aire}(\text{ABC})} \quad \frac{\text{Aire}(\text{ABM})}{\text{Aire}(\text{ABC})}.$$

La preuve de cette remarque est laissée en exercice.

IV. Exercices

Exercice 1.

Soit A, B, P trois points distincts du plan tels que $P \in [AB]$. Écrire P comme barycentre de A et B avec des coefficients s'écrivant en fonction des distances PA et PB .

Exercice 2.**Constructions à la règle et au compas**

Soient A, B deux points du plan. Construire les points suivants :

1. G_1 barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$
2. G_2 barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$
3. G_3 barycentre de $(A, 5)$ et $(B, 7)$
4. G_4 barycentre de $(A, -1)$ et $(B, 1)$
5. G_5 barycentre de $(A, -3)$ et $(B, 2)$
6. G_6 barycentre de $(A, -3)$ et $(B, -2)$

Exercice 3.**Constructions à la règle et au compas (bis)**

Soient A, B et C trois points du plan. Construire les points suivants :

1. G_1 barycentre de $(A, 1), (B, 1)$ et $(C, 1)$
2. G_2 barycentre de $(A, 2), (B, 3)$ et $(C, 4)$
3. G_3 barycentre de $(A, -5), (B, 2)$ et $(C, 2)$.

Exercice 4.

Soient A, B, C trois points du plan non alignés. Les droites $(AB), (BC)$ et (AC) délimitent 7 zones du plan. Indiquer à quelle zone du plan appartient le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ et (C, γ) selon les signes de α, β et γ .

Exercice 5.

Soit un triangle ABC , montrer que les trois médianes de ABC sont concourantes en le point G , isobarycentre de A, B et C . De plus, si A' est le milieu de $[BC]$, on a $AG = \frac{2}{3}AA'$.

Exercice 6.

Soit ABC un triangle et soit G son centre de gravité. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ est colinéaire à \vec{AB} .

Exercice 7.

Soient $A(2, -5), B(1, 2), C(3, 4)$ et $D(-1, -1)$ dont les coordonnées cartésiennes sont données dans un repère (O, I, J) . Soit G le barycentre de $(A, 1), (B, 2), (C, 3)$ et $(D, 1)$. Déterminer les coordonnées de G dans le repère (O, I, J) .

Exercice 8.

Soit $ABCD$ un quadrilatère. Construire le point G isobarycentre de A, B, C et D .

Exercice 9.

Soit ABC un triangle et soit G son centre de gravité. On note G' le symétrique de G par rapport au milieu de $[BC]$. Déterminer les coordonnées barycentriques de G par rapport à $[BC]$.

Exercice 10.

Soit $ABCD$ un carré. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$\|2\vec{MA} - 2\vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|AB\|$$

Exercice 11.

Dans le triangle ABC , E est le milieu de $[AB]$ et G est le barycentre de $(A, -2), (B, -2)$ et $(C, 15)$. Démontrer que G, C et E sont alignés.

Exercice 12.

1. Montrer que le centre du cercle inscrit a pour coordonnées barycentriques (a, b, c) relativement à A, B et C .
2. Montrer que l'orthocentre a pour coordonnées barycentriques $(\tan \hat{A}, \tan \hat{B}, \tan \hat{C})$ relativement à A, B et C .
3. Montrer que le centre du cercle circonscrit a pour coordonnées barycentriques $(\sin 2\hat{A}, \sin 2\hat{B}, \sin 2\hat{C})$ relativement à A, B et C .

Exercice 13.

Soit (A, B, C) un repère du plan. Soit (CD) une droite du plan. Soit M dont les coordonnées barycentriques par rapport à A, B et C sont $[x, y, z]$.

1. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$M \in (CD) \iff ax + by + cz = 0$$

(On dit que $ax + by + cz = 0$ est une équation barycentrique de (CD))

2. Déterminer une équation barycentrique de la droite (AB) où les coordonnées cartésiennes de A et B sont A(1, 5) et B(3, 9).

Exercice 14.

Montrer que trois droites du plan dont les équations barycentriques sont $ax + by + cz = 0$, $a'x + b'y + c'z = 0$ et $a''x + b''y + c''z = 0$, sont concourantes ou parallèles si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 15.

On considère $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ ses racines et, pour tout $0 \leq i \leq n$, A_i désigne le

point d'affixe a_i . Montrer que toutes les racines du polynôme P' sont contenues dans l'enveloppe convexe des $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Indication : on pourra commencer par décomposer la fraction $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.

Exercice 16. Théorème de Ménélaüs

Soit ABC un triangle. Soient M, N, P trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) distincts des sommets A, B, C du triangle. Alors M, N et P sont alignés si, et seulement si,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1.$$

Exercice 17. Théorème de Céva

Soit ABC un triangle. Soient A', B', C' trois points appartenant respectivement (BC), (CA) et (AB) distincts des sommets A, B, C du triangle. Alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si, et seulement si,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Chapitre 4

Transformations vectorielles et affines

Dans ce chapitre, on considérera le plan, soit comme un espace vectoriel (ensemble de vecteurs), soit comme un espace affine (ensemble de points). Sur un espace vectoriel, on peut ainsi définir des applications linéaires et en particulier (en munissant le plan du produit scalaire) des isométries et similitudes vectorielles. Sur un espace affine, on définira en revanche la notion d'application affine avec, comme cas particuliers, les isométries affines et les similitudes affines. Dans tous les cas, on munit l'espace d'un produit scalaire.

I. Isométries vectorielles

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel euclidien (muni d'un produit scalaire) de dimension 2.

1. Classification des isométries vectorielles

Définition 4.1

Un endomorphisme $u : E \rightarrow E$ est une isométrie vectorielle si

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

L'ensemble des isométries vectorielles de E est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé groupe orthogonal de E et noté $O(E)$. Les isométries vectorielles sont aussi appelées endomorphismes orthogonaux.

Proposition 4.1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est une isométrie vectorielle si, et seulement si, pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| = \|x\| \quad (*)$$

Démonstration. Si u est une isométrie vectorielle, alors elle préserve la norme car $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Réciproquement, si u vérifie (*), alors on montre que u conserve le produit scalaire en utilisant l'identité de polarisation :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

ce qui signifie que u est une isométrie vectorielle. □

Corollaire 4.2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est une isométrie vectorielle, alors $Sp(u) \subset \{\pm 1\}$

Démonstration. Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé à λ . Alors $\|u(x)\| = \|x\|$.

Donc $\lambda\|x\| = \|x\|$

Donc $\lambda = 1$ (car $\|x\| \neq 0$) □

Proposition 4.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $u \in O(E)$;
- (ii) Pour toute BON \mathcal{B} , $u(\mathcal{B})$ est une BON;
- (iii) Il existe une BON \mathcal{B} telle que $u(\mathcal{B})$ est BON;
- (iv) Pour toute BON \mathcal{B} , la matrice $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ vérifie ${}^tMM = I_2$;
- (v) Il existe une BON \mathcal{B} telle que la matrice $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ vérifie ${}^tMM = I_2$.

Démonstration. Voir cours d'algèbre linéaire. □

Remarque. En notant, $O_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M^tM = I_2\}$, on a un isomorphisme entre $O(E)$ et $O_2(\mathbb{R})$.

Exemple. Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est une isométrie, appelée **réflexion** (en dimension quelconque, une réflexion désigne une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan).

En effet, soit D une droite (vectorielle) et soit s la symétrie par rapport à D parallèlement à D^\perp . On considère \vec{e}_1 un vecteur directeur de D de norme 1 et \vec{e}_2 un vecteur directeur de D^\perp de norme 1. Il est clair que (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est une base orthonormée et la matrice de s est :

$$M = \text{mat}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}).$$

Définition 4.2

Pour tout $u \in O(E)$, $\det(u) = \pm 1$.

- Si $\det(u) = 1$, on dit que u est une isométrie directe (on dit aussi positive).
- Si $\det(u) = -1$, on dit que u est une isométrie indirecte ou négative).

L'ensemble des isométries directes est un groupe, appelé aussi groupe spécial orthogonal de E et noté $SO(E)$.

Démonstration. Soit $u \in O(E)$. Si M est la matrice de u dans une base orthonormée, on a ${}^tMM = I_2$ donc $\det({}^tM) = 1$ donc $\det({}^tM) \times \det(M) = 1$ donc $\det(M)^2 = 1$, d'où $\det(u) = \det(M) = \pm 1$ □

Proposition 4.4

- Une isométrie directe du plan préserve les angles.
- Une isométrie indirecte du plan change les angles en leur opposé.

Démonstration. Soient $x, y \in E$ et soit $u \in O(E)$. On considère les angles orientés suivantes : $\theta = (x, y) \bmod(2\pi)$ et $\theta' = (u(x), u(y)) \bmod(2\pi)$. Alors,

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta \quad \text{et} \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \|u(x)\| \|u(y)\| \cos \theta'$$

Donc

$$\cos \theta = \cos \theta'$$

Ainsi, $\theta' = \pm \theta \bmod(2\pi)$ De plus, par définition du déterminant de u ,

$$\det(u(x), u(y)) = \det(u) \det(x, y)$$

Comme

$$\det(x, y) = \|x\| \|y\| \sin \theta \quad \text{et} \quad \det(u(x), u(y)) = \|u(x)\| \|u(y)\| \sin \theta'$$

on en déduit que $\sin \theta' = \det(u) \times \sin \theta$.

Ainsi, si $\det(u) = 1$, on a $\theta' = \theta$ et si $\det(u) = -1$ on a $\theta' = -\theta$. □

Proposition 4.5

Toute isométrie vectorielle du plan $u \in O(E)$ est une composée d'au plus deux réflexions.

Lemme 4.6

Soit $u \in O(E)$. Si F un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors F^\perp est stable par u .

Démonstration. (du lemme 4.6)

Soit $u \in O(E)$. Soit F un sous-espace stable par u . Soit $x \in F^\perp$.

Pour tout $y \in F$, $\langle x, y \rangle = 0$.

Donc pour tout $y \in F$, $\langle u(x), u(y) \rangle = 0$.

Or, comme u est un isomorphisme sur un espace de dimension finie, $u(F) = F$ et on en déduit que pour tout $z \in F$, $\langle u(x), z \rangle = 0$, ce qui signifie que $u(x) \in F^\perp$ et donc que F^\perp est stable. □

Démonstration. (de la proposition 4.5)

Soit $F = \text{Ker}(f - Id)$.

- Si $\dim(F) = 2$, alors $f = Id$.
- Si $\dim(F) = 1$ alors F et F^\perp sont des droites stables par u . Ainsi tout vecteur directeur de F et de F^\perp sont des vecteurs propres de u . On en déduit que u admet pour valeurs propres 1 et -1 et que u est donc la symétrie par rapport à F parallèlement à F^\perp , c'est-à-dire la réflexion d'axe F .

- Si $\dim(F) = 0$. Soit \vec{e}_1 un vecteur non nul de E .
On considère la réflexion qui échange \vec{e}_1 et $u(\vec{e}_1)$. Il suffit pour cela de considérer la réflexion par rapport à $\text{Vect}\left\{\frac{1}{2}(u(\vec{e}_1) + \vec{e}_1)\right\}$, c'est-à-dire la symétrie par rapport à $\text{Vect}\left\{\frac{1}{2}(u(\vec{e}_1) + \vec{e}_1)\right\}$ parallèlement à $\text{Vect}\left\{\frac{1}{2}(u(\vec{e}_1) - \vec{e}_1)\right\}$.
On a bien $s(u(\vec{e}_1)) = \vec{e}_1$ par linéarité de s .
Ainsi, $s \circ u$ admet un point fixe donc, d'après les points précédents, $s \circ u$ est l'identité ou une réflexion. En utilisant le fait que $s^2 = Id$, on en déduit que u est une réflexion ou la composée de deux réflexions.

□

Remarque.

- Si u est composée de 0 réflexion, $u = id$.
- Si u est composée de 1 réflexion, u est une réflexion d'axe D .
Soit $e = (e_1, e_2)$ une BOND de E et soit $\theta = (\mathbb{R}e_1, D) \text{ mod}(\pi)$. Alors,

$$\text{mat}(u, e) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

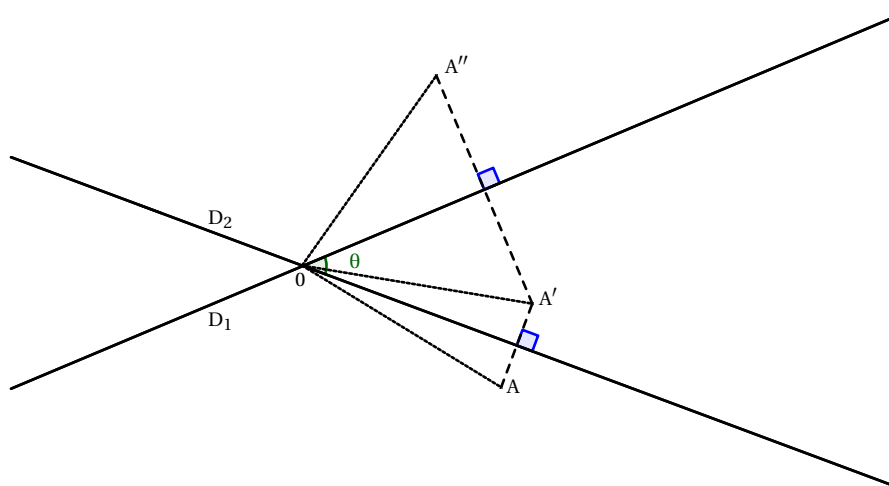
- Si u est composée de deux réflexions, $u = s_2 \circ s_1$ (avec $s_1 \neq s_2$ des réflexions d'axes D_1 et D_2). On note $\theta = (D_1, D_2) \text{ mod}(\pi)$. Alors,

$$\begin{aligned} \text{mat}_e(u) &= \text{mat}_e(s_1) \times \text{mat}_e(s_2) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta_2) & \sin(2\theta_2) \\ \sin(2\theta_2) & -\cos(2\theta_2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(2\theta_1) & \sin(2\theta_1) \\ \sin(2\theta_1) & -\cos(2\theta_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad \text{car } \theta = \theta_2 - \theta_1 \text{ mod}(\pi) \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que la matrice de u dans toute base orthonormée directe ne dépend pas des droites D_1 et D_2 choisies mais uniquement de l'angle θ .

Définition 4.3

On dit que u est la rotation vectorielle d'angle $2\theta \text{ mod}(\pi)$.



Proposition 4.7

- Toute isométrie directe du plan est une rotation.

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

De plus, l'application suivante est un morphisme de groupes surjectifs :

$$R : \begin{cases} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (SO_2(\mathbb{R}), \times) \\ \theta & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Toute isométrie indirecte du plan est une réflexion.

$$O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration. La remarque précédente permet de justifier la paramétrisation donnée pour $SO_2(\mathbb{R})$ et $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$. Il reste à prouver que R est bien un morphisme surjectif de groupes.

Pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on montre que $R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_1) \times R(\theta_2)$ en utilisant les formules d'addition du cosinus et du sinus. Le morphisme R est par ailleurs surjectif car toute rotation s'écrit bien de la forme voulue : $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. □

Remarque.

- $SO_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif : deux rotations vectorielles du plan commutent.
- Attention, dans l'expression des matrices de réflexion, l'angle θ dépend de la base orthonormée directe choisie contrairement aux matrices de rotations.
- Par ailleurs, l'expression matricielle des isométries est valable dans le cadre où la base orthonormée considérée est directe. Par exemple, si (\vec{i}, \vec{j}) est la base canonique et si r est la rotation vectorielle envoyant \vec{i} sur \vec{j} . Son expression dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$, tandis que son expression dans la base (\vec{j}, \vec{i}) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{-\pi}{2} & -\sin \frac{-\pi}{2} \\ \sin \frac{-\pi}{2} & \cos \frac{-\pi}{2} \end{pmatrix}$. L'angle de la rotation est donc changé en son opposé lorsqu'on l'exprime dans une base indirecte. Cela provient du fait que la notion d'angle est intrinsèquement liée à l'orientation du plan.

2. Composition d'isométries

Proposition 4.8

En notant r_θ la rotation d'angle θ et s_D la réflexion d'axe D :

- $r_{\theta_1} \circ r_{\theta_2} = r_{\theta_1 + \theta_2}$
- $s_{D_1} \circ s_{D_2} = r_{2(D_1, D_2)}$
- $s_D \circ r_\theta = s_{D'}$ où $(D', D) = \frac{\theta}{2} \pmod{\pi}$

Démonstration.

- Voir au-dessus, proposition 4.7.

- Cela résulte directement de la définition d'une rotation.
- $s_D \circ r_\theta$ est une isométrie négative donc c'est une réflexion. Notons D' l'axe de cette réflexion. Alors, $s_D \circ r_\theta = s_{D'}$, donc :

$$r_\theta = s_D \circ s_{D'}$$

Or, on a vu que $s_D \circ s_{D'}$ est la rotation d'angle $2(D', D) \bmod(2\pi)$.

Donc $\theta = 2(D', D) \bmod(2\pi)$

Donc $\theta = (D', D) \bmod(\pi)$, ce qui définit bien la droite D' de manière unique.

□

II. Similitudes vectorielles

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel euclidien (muni d'un produit scalaire) de dimension 2.

Définition 4.4

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Un endomorphisme $u : E \rightarrow E$ est une similitude vectorielle de rapport k si

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle.$$

L'ensemble des similitudes de E est un sous-groupe de $GL(E)$, noté $GO(E)$.

Exemple. Soit $h_\lambda : x \in E \mapsto \lambda x$ l'homothétie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors h_λ est une similitude vectorielle de rapport $|\lambda|$.

En effet, pour tout $x, y \in E$,

$$\langle h_\lambda(x), h_\lambda(y) \rangle = \langle \lambda x, \lambda y \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle.$$

Attention toutefois, le rapport d'une homothétie vectorielle peut être négatif mais celui d'une similitude vectorielle est nécessairement strictement positif.

Proposition 4.9

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Un endomorphisme $u : E \rightarrow E$ est une similitude vectorielle de rapport k si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = k\|x\|$$

Démonstration. (i) \implies (ii) : Supposons que u est une similitude vectorielle de rapport k .

Soit $x \in E$, $\langle u(x), u(x) \rangle = k^2 \langle x, x \rangle$

Donc $\|u(x)\|^2 = k^2 \|x\|^2$

Donc $\|u(x)\| = k\|x\|$ car $k > 0$.

(ii) \implies (i) : Supposons que u est un endomorphisme tel que, pour tout x , $\|u(x)\| = k\|x\|$.

Alors

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (k^2 \|x + y\|^2 - k^2 \|x\|^2 - k^2 \|y\|^2) = k^2 \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

□

Proposition 4.10

Soit $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme.

Si u est une similitude vectorielle de rapport k , il existe une unique isométrie vectorielle v telle que $u = h_k \circ v$.

Autrement dit, l'application suivante est un isomorphisme de groupes :

$$s : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times O(E) & \longrightarrow & GO(E) \\ (k, v) & \longmapsto & h_k \circ v \end{cases}$$

Démonstration. Surjectivité : Soit $u \in GO(E)$ une similitude vectorielle de rapport k . On pose $v = h_{\frac{1}{k}} \circ u$. Il est clair que v est une isométrie (elle conserve la norme).

On a de plus $u = h_k \circ v$ car $h_k \circ h_{\frac{1}{k}} = Id$.

Injectivité : Soit v et v' deux isométries vectorielles et k et k' deux réels tels que $u = h_k \circ v = h_{k'} \circ v'$.

La similitude $h_k \circ v$ est de rapport k et la similitude $h_{k'} \circ v'$ est de rapport k' . Comme elles sont égales, on a $k = k'$.

De plus, en composant avec $h_{\frac{1}{k}}$, on obtient $v = v'$.

Enfin, il reste à montrer que l'application s est un morphisme. En effet, soient (k, v) et (k', v') .

Alors

$$\begin{aligned} s((k, v)(k', v')) &= s(kk', v \circ v') \\ &= h_{kk'} \circ v \circ v' \\ &= h_k \circ h_{k'} \circ v \circ v' \\ &= h_k \circ v \circ h_{k'} \circ v' && \text{car } h_{k'} \text{ commute avec } v \\ &= s(k, v) \circ s(k', v') \end{aligned}$$

Au final, s est un isomorphisme. □

Définition 4.5

Soit $u \in GO(E)$.

- Si $\det(u) > 0$, on dit que u est une similitude vectorielle positive.
- Si $\det(u) < 0$, on dit que u est une similitude vectorielle négative.

L'ensemble des isométries positives est un groupe, noté $GO^+(E)$.

Remarque. Une similitude vectorielle u est directe si, et seulement si, l'isométrie vectorielle associée v (voir Proposition 4.10) est directe. Cela découle directement du fait que $\det(h_k) > 0$ pour tout $k > 0$.

Proposition 4.11

- Toute similitude vectorielle directe de rapport k s'écrit comme la composée d'une homothétie de rapport k et d'une rotation d'angle θ (appelé angle de la similitude). Sa matrice, dans toute base orthonormée directe est :

$$\begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{pmatrix}$$

- Toute similitude vectorielle indirecte de rapport k s'écrit comme la composée d'une homothétie de rapport k et d'une réflexion. En particulier, une similitude indirecte admet deux droites stables : D et D^\perp et si l'on choisit une base orthonormée portée par ces droites, sa matrice est :

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

Proposition 4.12

En identifiant E au plan complexe :

- Toute similitude vectorielle directe est de la forme $z \mapsto \alpha z$ (avec $\alpha \neq 0$).
- Toute similitude vectorielle indirecte est de la forme $z \mapsto \alpha \bar{z}$ (avec $\alpha \neq 0$).

Démonstration. Soit s une similitude vectorielle directe : D'après la proposition 4.11, la matrice de s dans la base canonique est de la forme $\begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{pmatrix}$.

Ainsi, en identifiant e_1 avec 1 et e_2 avec i , on a :

$$s(1) = k \cos \theta \times 1 + k \sin \theta \times i = ke^{i\theta}$$

De même,

$$s(i) = -k \sin \theta \times 1 + k \cos \theta \times i = i(k \cos \theta + k \sin \theta) = ike^{i\theta}$$

Ainsi, par linéarité de s , on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad s(z) = ke^{i\theta} z$$

En posant $\alpha = ke^{i\theta}$, on a bien $s(z) = \alpha z$.

Réciproquement, supposons que s est de la forme $s(z) = \alpha z$ (avec $\alpha \neq 0$).

On pose $\alpha = ke^{i\theta}$. On vérifie alors que la matrice de s dans la base canonique (e_1, e_2) est bien $\begin{pmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que s est bien une similitude vectorielle directe.

Le cas des similitudes vectorielles indirectes est laissée en exercice. □

III. Isométries affines

Dans cette partie, E désigne un espace affine de dimension 2 (un ensemble de points). \vec{E} désigne l'ensemble des vecteurs formés à partir de points de E . On suppose que \vec{E} est muni d'un produit scalaire (\vec{E} est donc un espace vectoriel euclidien).

1. Application affine

Définition 4.6

Soit $f : E \rightarrow E$ une application. On dit que f est une application affine s'il existe $g \in \mathcal{L}(\vec{E})$ telle que

$$\forall (A, B) \in E^2, \overrightarrow{f(A)f(B)} = g(\overrightarrow{AB}).$$

g est appelée la partie linéaire de f et on note $g = \vec{f}$.

Remarque. . Si f est une application affine, la partie linéaire de f est unique. En effet, supposons que g_1 et g_2 soient des endomorphismes de \vec{E} vérifiant l'hypothèse de la définition 4.6. Soit $v \in \vec{E}$. On considère deux points $A, B \in E$ tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. On a alors,

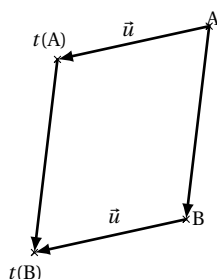
$$g_1(\vec{v}) = g_1(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = g_2(\overrightarrow{AB}) = g_2(\vec{v}).$$

. On peut reformuler l'égalité de la définition 4.6 de la façon suivante : pour tous points A et B , si $B = A + \vec{v}$, alors

$$f(B) = f(A) + \vec{f}(\vec{v}).$$

Exemple.

- Les **translations** du plan sont des applications affines.
En effet, si t est une translation de vecteur \vec{u} , on a $\overrightarrow{t(A)t(B)} = \overrightarrow{AB}$. (on prend $\vec{t} = Id$)



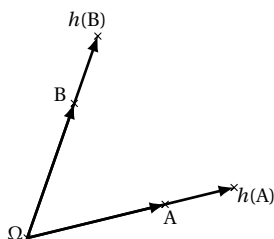
- Les **homothéties** sont des applications affines.
En effet, si $h_{\Omega, \lambda}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, par définition :

$$\text{Pour tout point } A, \overrightarrow{\Omega h(A)} = \lambda \overrightarrow{\Omega A}$$

Ainsi, pour tout point A, B :

$$\overrightarrow{h(A)h(B)} = \overrightarrow{h(A)\Omega} + \overrightarrow{\Omega h(B)} = \lambda \overrightarrow{A\Omega} + \lambda \overrightarrow{\Omega B} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

Il suffit de prendre $\vec{h} = \lambda Id$.



Proposition 4.13

Pour toute application affine f , il existe une translation t et une application affine g possédant (au moins) un point fixe tels que $f = t \circ g$.

Démonstration. Si f possède un point fixe, c'est évident en prenant $f = g$.

Sinon, on considère un point du plan O et son image $f(O)$.

On pose ensuite $g = t_{\overrightarrow{f(O)O}} \circ f$.

Il est clair que g possède un point fixe (car $g(O) = O$) et que $f = t_{\overrightarrow{Of(O)}} \circ g$. □

Proposition 4.14

Les applications affines sur \mathbb{R}^2 sont de la forme $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ax + by + \alpha \\ cx + dy + \beta \end{pmatrix} \end{cases}$

Démonstration. Soit f une application affine sur \mathbb{R}^2 .

Soit $O(0,0)$. On note $f(O) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Alors, pour tout $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM})$$

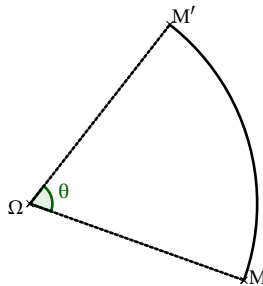
Ainsi, en notant $\text{mat}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on obtient que pour tout $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d'où le résultat. □

Exemple. Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine. Si \vec{f} est une rotation vectorielle (avec $\vec{f} \neq Id$), on dit que f est une **rotation affine**. Le lemme suivant montre que f admet un unique point fixe, appelé le centre de la rotation. En général, on note $r_{\Omega, \theta}$ la rotation de centre Ω et d'angle θ . On note

$$r_{\Omega, \theta} : M \in E \mapsto \Omega + \vec{r}(\overrightarrow{\Omega M}) \in E$$



Lemme 4.15

Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine. Alors f admet un unique point fixe, si et seulement si, 1 n'est pas une valeur propre de \vec{f} .

Démonstration. (du lemme 4.15)

- Supposons que \vec{f} admette 1 comme valeur propre. On va montrer que f n'admet pas de point fixe ou en admet plusieurs.

En effet, si f admet un point fixe O , alors en notant \vec{v} un vecteur propre non nul de \vec{f} , on voit que $M = O + \vec{v}$ est un point fixe de f car

$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{Of(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{OM}.$$

Et f admet ainsi au moins deux points fixes (car $M \neq O$).

- Supposons que \vec{f} n'admette pas 1 comme valeur propre. Cela signifie que $\vec{f} - Id$ est injectif et donc un isomorphisme (en dimension finie). Soit O un point du plan (on pourra prendre l'origine par exemple). Soit M un point du plan.

M est un point fixe si, et seulement si,

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f(O)M}, \\ &\iff \overrightarrow{f(O)M} = \vec{f}(\overrightarrow{OM}) \\ &\iff \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OM} = \vec{f}(\overrightarrow{OM}) \\ &\iff \overrightarrow{f(O)O} = \vec{f}(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

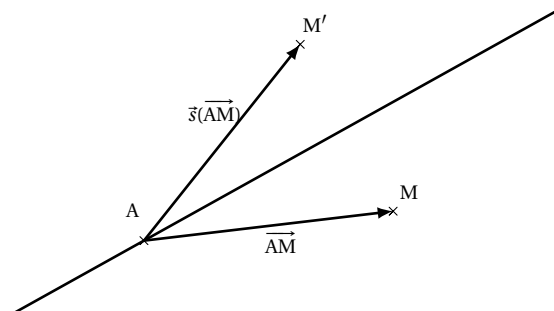
Ainsi, \overrightarrow{OM} est un antécédent de $\overrightarrow{f(O)O}$ par l'isomorphisme $f - Id$.

Il n'y a qu'un seul vecteur \overrightarrow{OM} qui est solution et donc qu'un seul point possible M . Autrement dit, f admet un unique point fixe.

□

Exemple. Soit $D \subset E$ une droite du plan. Soit \vec{s} une réflexion vectorielle d'axe \vec{D} et A un point de D . L'application $f : M \mapsto A + \vec{s}(\overrightarrow{AM})$ est appelée réflexion affine d'axe $D = A + \vec{F}$. On montre alors que la définition d'une réflexion affine d'axe D dépend uniquement de D et non pas du point A considéré. Autrement dit, si $B \in D$, avec l'application $g : M \mapsto B + \vec{s}(\overrightarrow{BM})$, on a $f = g$.

Laissé en exercice.



Proposition 4.16

Soient f et g deux applications affines. Alors $f \circ g$ est affine et $\overrightarrow{f \circ g} = \vec{f} \circ \vec{g}$.

Démonstration. Soient f et g deux applications affines. Soient A et B deux points du plan.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(f \circ g)(A)(f \circ g)(B)} &= \vec{f}(\overrightarrow{g(A)g(B)}) && \text{car } f \text{ est affine} \\ &= \vec{f}(\vec{g}(\overrightarrow{AB})) && \text{car } g \text{ est affine} \\ &= \vec{f} \circ \vec{g}(\overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

d'où le résultat car $\vec{f} \circ \vec{g}$ est linéaire. □

Proposition 4.17

Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine et bijective. Alors f^{-1} est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$. Ainsi, l'ensemble des applications affines et bijectives du plan forment un groupe appelé groupe affine et noté $GA(E)$.

Démonstration. Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine et bijective.

On commence par montrer que \vec{f} est un isomorphisme.

Comme \vec{f} est un endomorphisme en dimension finie, il suffit de prouver que \vec{f} est injectif.

Soit $\vec{v} \in \text{Ker}(\vec{f})$.

On considère deux points du plan A, B tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

On a $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{f}(\vec{v}) = \vec{0}$.

Donc $f(A) = f(B)$ et donc $A = B$ (f est bijective). Cela prouve que $\text{Ker}(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$ et donc que \vec{f} est un isomorphisme.

Soit $A', B' \in E$, Soient A et B les antécédents respectifs de A' et B' par f . Alors,

$$\overrightarrow{f^{-1}(A')f^{-1}(B')} = \overrightarrow{AB} \quad (*)$$

Or,

$$\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{A'B'},$$

donc en appliquant $(\vec{f})^{-1}$, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{A'B'})$$

En remplaçant dans (*), il vient $\overrightarrow{f^{-1}(A')f^{-1}(B')} = \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{A'B'})$.

Cela prouve exactement que f^{-1} est affine et que $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$.

Enfin, l'ensemble $GA(E)$ est bien un groupe. En effet,

- il contient l'identité (élément neutre).
- la composée de deux applications affines et bijectives et une application affine et bijective : d'après la Proposition 4.16, la composée de deux applications affines est affine et on sait par ailleurs que la composée de deux bijections est une bijection.
- toute application affine et bijective admet un inverse dans $GA(E)$ d'après ce qui a été fait ci-dessus. □

Proposition 4.18

Une application affine conserve :

- le parallélisme
- l'alignement
- le barycentre (en particulier le milieu)

Démonstration. Soit f une application affine du plan.

- Conservation du parallélisme :
Soit (AB) et (CD) deux droites du plan parallèles. Cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$.
Comme f est affine,

$$\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \lambda \vec{f}(\overrightarrow{CD})$$

Donc

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda \overrightarrow{f(C)f(D)}$$

ce qui prouve que $(f(A)f(B))$ et $(f(C)f(D))$ sont parallèles.

- Conservation de l'alignement :
Soit A, B, C trois points alignés. On a donc $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ et on montre, comme précédemment que $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda \overrightarrow{f(A)f(C)}$, d'où le résultat.
- Conservation du barycentre :

Soit G le barycentre de $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$.

$$\text{On a } \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \vec{f}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{f}(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{0} \quad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^n \alpha_i f(G)f(A_i) = \vec{0}$$

ce qui montre que $f(G)$ est le barycentre de $(f(A_1), \alpha_1), \dots, (f(A_n), \alpha_n)$.

En particulier, si I est le milieu de $[AB]$, alors $f(I)$ sera le milieu de $[f(A)f(B)]$. □

2. Isométries affines

Définition 4.7

Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine. f est appelée une isométrie affine si,

$$\forall (A, B) \in E^2, \quad d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

On note $\mathcal{I}(E)$ l'ensemble des isométries affines

Proposition 4.19

$$\mathcal{I}(E) \subset \text{GA}(E)$$

Démonstration. Soit $f : E \rightarrow E$ une isométrie affine.

Soient A et B deux points du plan tels que $f(A) = f(B)$.

On a donc $d(f(A), f(B)) = 0$, donc $d(A, B) = 0$, ce qui signifie que $A = B$.

Ainsi, f est injective, ce qui implique que \vec{f} est également injective. Or, l'injectivité d'un morphisme d'espace vectoriel en dimension finie implique la bijectivité. Finalement, \vec{f} est bijective donc f est bijective également. □

Proposition 4.20

Soit $f : \rightarrow E$ une application affine. On a :

$$f \in \mathcal{S}(E) \iff \vec{f} \in O(E).$$

Démonstration. \implies : Soit $f \in GA(E)$. Alors :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{S}(E) &\iff \text{pour tous } A, B \in E, \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \\ &\iff \text{pour tous } A, B \in E, \|\vec{f}(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{AB}\| \\ &\iff \text{pour tout } \vec{x} \in E, \|\vec{f}(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \\ &\iff \vec{f} \in O(E) \end{aligned}$$

□

Proposition 4.21

$(\mathcal{S}(E), \circ)$ est un groupe.

Démonstration. On va montrer que $\mathcal{S}(E)$ est un sous groupe de $GA(E)$. Il est clair que $\mathcal{S}(E)$ contient l'identité. Par ailleurs, soient $f, g \in \mathcal{S}(E)$. Alors, $f \circ g^{-1} \in GA(E)$. (car $GA(E)$ est un groupe). D'après les propositions 4.16 et 4.17,

$$\overrightarrow{f \circ g^{-1}} = \vec{f} \circ g^{-1}$$

En utilisant la proposition 4.20, on en déduit que $\overrightarrow{f \circ g^{-1}} \in O(E)$ et donc que $f \circ g^{-1} \in \mathcal{S}(E)$. □

Définition 4.8

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.

- Si $\det(\vec{f}) = 1$, on dit que f est une isométrie affine positive ou un déplacement (on note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des isométries affines positives de E).
- Si $\det(\vec{f}) = -1$, on dit que f est une isométrie affine négative ou un anti-déplacement.

Proposition 4.22

$(\mathcal{S}^+(E), \circ)$ est un groupe.

Démonstration. $\mathcal{S}^+(E)$ contient l'identité.

Soient, $f, g \in \mathcal{S}^+(E)$. On sait que $f \circ g^{-1} \in \mathcal{S}(E)$ car $\mathcal{S}(E)$ est un groupe.

De plus, $\det(\overrightarrow{f \circ g^{-1}}) = \frac{\det(\vec{f})}{\det(\vec{g})} = 1$ donc $f \circ g^{-1} \in \mathcal{S}^+(E)$ □

Remarque. Ceci est faux pour les isométries négatives.

Proposition 4.23

Toute isométrie affine du plan $f \in \mathcal{S}(E)$ est une composée d'au plus trois réflexions affines.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{S}(E)$.

- Si ϕ admet trois points fixes A, B et C non alignés, alors $\phi = Id$.
- Supposons que ϕ admette deux points fixes A et B (mais pas trois points fixes non alignés). Soit C un point en dehors de la droite (AB) et C' son image par ϕ . On note σ_D la réflexion d'axe $\mathcal{D} = (AB)$. Comme $AC = AC'$ et $BC = BC'$ (ϕ est une isométrie), \mathcal{D} est la médiatrice de $[CC']$ et les points A, B et C sont donc des points fixes de $\sigma_D \circ \phi$. Ainsi, $\sigma_D \circ \phi = Id$ et on a donc $\phi = \sigma_D$.
- Supposons que ϕ admette un unique point fixe A. Soit B un point différent de A et B' son image par ϕ . On note \mathcal{D} la médiatrice de $[BB']$. Comme précédemment, $A \in \mathcal{D}$ donc l'application $\sigma_D \circ \phi$ admet (au moins) deux points fixes. D'après, ce qui précède, $\sigma_D \circ \phi$ est l'identité ou une réflexion. Par conséquent, ϕ est la composée d'une ou de deux réflexions.
- Supposons que ϕ n'admette pas de point fixe. Soit A un point quelconque du plan et A' son image par ϕ . On note \mathcal{D} la médiatrice de $[AA']$. Ainsi, $\sigma_D \circ \phi$ admet (au moins) un point fixe et on en déduit, d'après ce qui précède, que ϕ est la composée d'au plus trois réflexions.

□

3. Déplacements

Proposition 4.24

Les déplacements du plan sont les translations et les rotations.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{I}^+(\mathbb{E})$ un déplacement. Alors $\vec{f} \in SO(\vec{\mathbb{E}})$.

- Si $\vec{f} = I_2$, alors f est une translation.
- Sinon, \vec{f} est une rotation vectorielle différente de l'identité. Par définition, f est donc une rotation affine.

□

Remarque. On appelle *angle du déplacement (isométrie affine positive)* l'angle de l'isométrie vectorielle associée

Proposition 4.25

En utilisant les notations habituelles pour les translations et les rotations :

- $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$
- $t_{\vec{u}} \circ r_{A,\theta}$ est une rotation d'angle θ
- $r_{A,\theta} \circ r_{A',\theta'}$ est une rotation ou une translation.

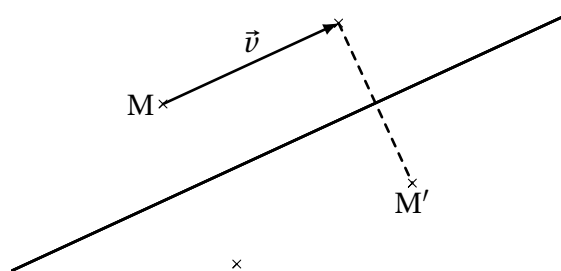
Démonstration. On utilise le fait que l'ensemble des déplacements (translations et rotations) forment un groupe. Il suffit ensuite de considérer les applications linéaires associées (c'est l'identité pour une translation). □

Remarque. Attention, si t est une translation et r une rotation, en général : $t \circ r \neq r \circ t$.

4. Anti-déplacements

Définition 4.9

La composée d'une réflexion d'axe D et d'une translation de vecteur $\vec{v} \in \vec{D}$ est appelée glissement.



Proposition 4.26

Les anti-déplacements du plan sont les réflexions et les glissements.

Démonstration. Soit f un anti-déplacement du plan. $\vec{f} \in O(\vec{E}) \setminus SO(\vec{E})$ donc \vec{f} est une réflexion vectorielle.

- Si f admet un point fixe A , alors $f : M \mapsto A + \vec{f}(\overrightarrow{AM})$ et f est donc une réflexion affine d'axe $A + \vec{D}$.
- Si f n'admet pas de point fixe, on peut écrire (d'après la proposition 4.13) $f = t_{\vec{v}} \circ g$ où g est une isométrie négative ayant (au moins) un point fixe. g est donc une réflexion affine et si on note D son axe, on souhaite montrer que $\vec{v} \in \vec{D}$.

Comme $\vec{E} = \vec{D} \oplus \vec{D}^\perp$, on peut décomposer le vecteur \vec{v} en $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in \vec{D}$ et $\vec{v}_2 \in \vec{D}^\perp$. Ainsi,

$$f = t_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2} \circ g = t_{\vec{v}_1} \circ (t_{\vec{v}_2} \circ g)$$

Il suffit alors de montrer que $t_{\vec{v}_2} \circ g$ est une réflexion dont l'axe a pour vecteur directeur \vec{v}_1 . En fait, la partie linéaire de $t_{\vec{v}_2} \circ g$ est bien une réflexion vectorielle. De plus, les points de la droite D' , image de D par la translation de vecteur $\frac{\vec{v}_2}{2}$, sont des points fixes de $t_{\vec{v}_2} \circ g$.

□

Proposition 4.27

- Les déplacements du plan conservent les angles.
- Les anti-déplacements du plan changent les angles en leur opposé.
- Les isométries affines du plan conservent les aires.

Démonstration. Soient A, B et C trois points du plan.

$$\left(\overrightarrow{f(A)f(B)}; \overrightarrow{f(A)f(C)} \right) = \left(\vec{f}(\overrightarrow{AB}); \vec{f}(\overrightarrow{AC}) \right) = \pm \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right) \text{ mod}(2\pi)$$

selon que \vec{f} est une isométrie vectorielle directe ou indirecte (voir proposition 4.4).

Pour le troisième point, on montre que l'aire du triangle $f(A)f(B)f(C)$ est la même que celle de ABC :

$$\mathcal{A}_{f(A)f(B)f(C)} = \left| \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{f(A)f(B)}; \overrightarrow{f(A)f(C)}) \right| = \left| \frac{1}{2} \det(\vec{f}) \times \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \right| = \mathcal{A}_{ABC}$$

car $\det(\vec{f}) = \pm 1$

□

5. Résumé des déplacements et anti-déplacements

	Déplacements		Anti-déplacements	
	Translations	Rotations	Réflexions	Glissements
Partie linéaire \vec{f}	Id	Rotation	Réflexion	Réflexion
Valeurs propres de \vec{f} (avec multiplicité)	1, 1	\emptyset si $\vec{f} \neq \pm Id$	1, -1	1, -1
Points fixes	\emptyset	unique point fixe	une droite D	\emptyset
Droites invariantes	Une direction de droites	Pas de droite invariante	D et les droites perpendiculaires à D	une unique droite invariante
Décomposition en réflexions	2 (axes parallèles)	2 (axes sécants)	1	3

IV. Similitudes affines

Définition 4.10

Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine et soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est une similitude affine de rapport k si

$$\forall (A, B) \in E^2, d(f(A), f(B)) = kd(A, B).$$

Exemple. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Une homothétie de centre Ω et de rapport k est, par définition, l'application $h_{\Omega, k} : M \mapsto \Omega + k\overrightarrow{\Omega M}$. C'est une similitude affine de rapport $|k|$. Attention, comme dans le cas vectoriel, le rapport d'une homothétie peut être négatif mais celui d'une similitude affine est nécessairement strictement positif.

Proposition 4.28

L'ensemble des similitudes affines forme un groupe.

Démonstration. Cela découle directement du fait que la composée de deux similitudes vectorielles est une similitude vectorielle. □

Proposition 4.29

Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine et soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est une similitude affine de rapport k
- (ii) f est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie affine.
- (iii) \vec{f} est une similitude vectorielle.

Démonstration.

- (i) \implies (ii) :

Soit f une similitude affine de rapport $k > 0$. Soit A un point fixé du plan (A est

néanmoins quelconque). Il est facile de montrer que $g = h_{A, \frac{1}{k}} \circ f$ est une isométrie (elle préserve les longueurs). Par conséquent, $f = h_{A, k} \circ g$.

• (ii) \implies (iii) :

Si f est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie affine, alors \vec{f} est la composée d'une homothétie et d'une isométrie (vectorielles). D'après les résultats sur les applications linéaires, c'est donc que \vec{f} est une similitude vectorielle.

• (iii) \implies (i) :

Si \vec{f} est une similitude vectorielle de rapport $k > 0$,

$$\| \overrightarrow{f(A)f(B)} \| = \| \vec{f}(\overrightarrow{AB}) \| = k \| \overrightarrow{AB} \| \quad (\text{car } \vec{f} \text{ est une similitude})$$

Cela prouve exactement que f est une similitude affine de rapport k . □

Remarque. Dans le cas d'une similitude affine directe, son angle est, par définition, l'angle de l'isométrie affine associée.

Proposition 4.30

Soit f une similitude affine qui n'est pas une isométrie. Alors f admet un unique point fixe appelé centre de la similitude.

Démonstration. Soit f une similitude et \vec{f} l'endomorphisme associé. Comme \vec{f} n'est pas une isométrie vectorielle, son rapport n'est pas égal à 1 et 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} . D'après le lemme 4.15, f admet donc un unique point fixe. □

Proposition 4.31

En identifiant E au plan complexe :

- Toute similitude affine directe est de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta$ (avec $\alpha \neq 0$).
- Toute similitude vectorielle indirecte est de la forme $z \mapsto \alpha \bar{z} + \beta$ (avec $\alpha \neq 0$).

Démonstration. Par définition, une similitude affine f est de la forme $f : M \mapsto f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$. En notant $f(O) = \beta \in \mathbb{C}$ et en utilisant la proposition pour les similitudes vectorielles, on obtient le résultat souhaité. □

Remarque. Une similitude affine directe est déterminée par son centre éventuel (point fixe), son rapport (égal à $|\alpha|$) et son angle ($\arg(\alpha) \bmod(2\pi)$).

V. Grands théorèmes de la géométrie affine

1. Théorème de Thalès

Théorème 4.32 – Thalès

Soit un triangle ABC. Soit un point D sur la droite (AB) et un point E sur la droite (AC), de sorte que la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC). Alors,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

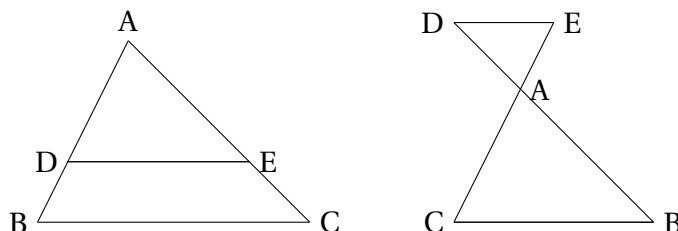
Remarque.

- Pour trois points alignés A, B et C, la notation $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ désigne le réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$.

Il correspond au rapport de longueur entre AB et AC compté positivement si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont de même sens et négativement sinon. Attention toutefois, considérés isolément, ni \overline{AB} , ni \overline{AC} n'ont de sens.

- On en déduit aussi facilement que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$



Démonstration. Soit $k = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$. On considère l'homothétie h de centre A et de rapport k .

Ainsi, $h(B) = A + k\overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{AD} = D$.

On va ensuite va montrer que $h(C) = E$.

En fait, $h(C) \in (AC)$ (l'homothétie est de centre A).

De plus, comme $C \in (BC)$, $h(C)$ appartient à l'image de BC par h . Or, $h(BC)$ est une droite parallèle à (BC) passant par $h(B) = D$, c'est donc (DE) par hypothèse du théorème de Thalès.

Finalement, cela signifie que $h(C) \in (AC) \cap (DE)$ et on a donc $h(C) = E$.

Comme on a $h(A) = A$, $h(B) = D$ et $h(C) = E$ et que h multiplie les longueurs algébriques par, on en déduit les égalités annoncées :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

□

Théorème 4.33 – Réciproque de Thalès

Supposons que les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés dans le même ordre. Si on a $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, alors les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

Démonstration. Soit E' le point de (AC) tel que (DE') soit parallèle à (BC). Alors les points A, E' et C sont alignés dans le même ordre que A, D, B et donc que A, E, C.

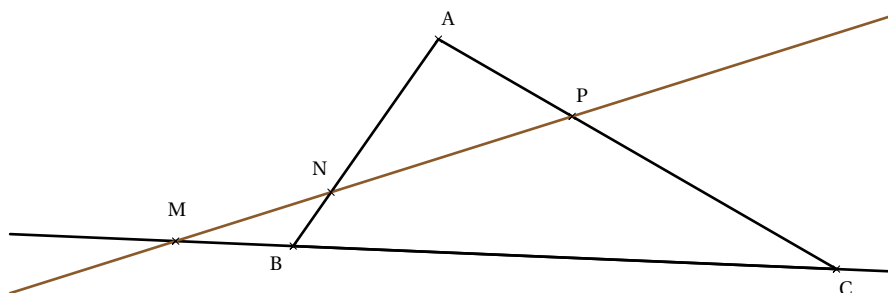
De plus, $\frac{AE'}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ donc $AE' = AE$. On en déduit que $E' = E$.

Par conséquent, (DE) = (DE') est parallèle à (BC). □

2. Théorème de Ménélaüs**Théorème 4.34 – Ménélaüs**

Soit ABC un triangle. Soient M, N, P trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) distincts des sommets A, B, C du triangle. Alors M, N et P sont alignés si, et seulement si,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1.$$

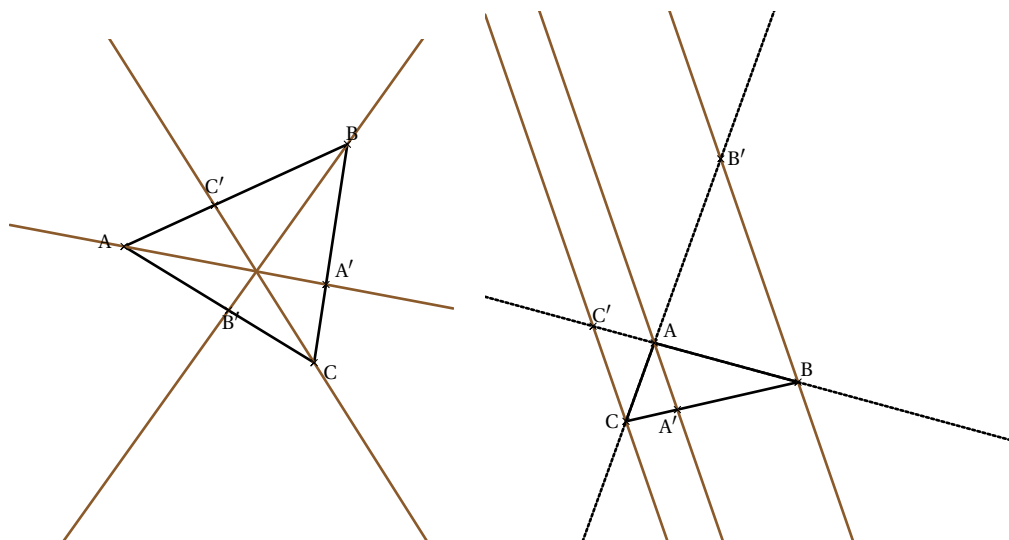


Démonstration. Laissée en exercice. □

3. Théorème de Ceva**Théorème 4.35 – Ceva**

Soit ABC un triangle. Soient A', B', C' trois points appartenant respectivement (BC), (CA) et (AB) distincts des sommets A, B, C du triangle. Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si, et seulement si,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$



Démonstration. Laissez en exercice. □

VI. Exercices

1. Transformations vectorielles

Exercice 1.

Soit E un plan vectoriel euclidien et soit $u \in O(E)$ ($u \neq Id$ et $u \neq -Id$) diagonalisable. Démontrer que u est une symétrie.

Exercice 2.

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté, et soient u et v deux vecteurs unitaires de E . Déterminer les automorphismes orthogonaux qui envoient u sur v .

Exercice 3.

Soient E un plan vectoriel euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion de E .

1. Déterminer $s \circ r \circ s$.
2. Déterminer $r \circ s \circ r$.
3. À quelle condition s et r commutent?

Exercice 4.

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Existe-t-il $u \in O(\mathbb{R}^2)$ tel que $u(\vec{a}) = \vec{b}$?
2. Déterminer les automorphismes orthogonaux $u \in O(\mathbb{R}^2)$ tels que $u(\vec{a}) = \vec{a}$.

3. Déterminer les automorphismes orthogonaux $u \in O(\mathbb{R}^2)$ tels que $u(\text{Vect}(\vec{a})) = \text{Vect}(\vec{b})$.

2. Transformations affines

Exercice 5.

Montrer que si h est une homothétie affine alors l'image d'une droite (AB) est parallèle à (AB) .

Exercice 6.

1. Quelle est la composée de deux réflexions affines?
2. Quelle est la composée de deux rotations affines?
3. Quelle est la composée d'une rotation et d'une réflexion affines?

Exercice 7.

1. Montrer que toute isométrie du plan est de la forme $f(z) = az + b$ ou $f(z) = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$.
2. À partir de l'écriture complexe, comment peut-on caractériser les translations? les rotations? les réflexions? les glissements?

3. Comment s'écrivent les transformations affines du plan en nombres complexes?

Exercice 8.

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Écrire l'expression en complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ .

Exercice 9.

Déterminer l'expression analytique (matricielle et en complexe) des transformations suivantes :

1. la rotation de centre $\Omega(1,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$
2. la réflexion d'axe $D: x + 2y = 1$
3. la symétrie glissée d'axe $D: y = -x + 3$ et de direction $\vec{u}(2 \quad -2)$

Exercice 10.

Identifier les transformations affines suivantes :

1. $f: (x, y) \mapsto (-y + 1, x + 2)$
2. $f: (x, y) \mapsto (y + 1, x)$
3. $f: z \mapsto (-2 + 2i)z + (5 + i)$
4. $f: z \mapsto z + 1 - 3i$
5. $f: z \mapsto (1 + \sqrt{3}i)z - i$
6. $f: z \mapsto -2i\bar{z} + 3$

Exercice 11.

Soit ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité G. I est le milieu de [AB]. Pour chacune des similitudes directes suivantes préciser son rapport et son angle.

1. s_1 qui a pour centre B et telle que $s_1(B) = C$.
2. s_2 qui a pour centre B et telle que $s_2(I) = C$.
3. s_3 qui a pour centre I et telle que $s_3(A) = C$.
4. s_4 qui a pour centre A et telle que $s_4(G) = C$.

Exercice 12.

Montrer que toute similitude qui fixe deux points distincts A et B est soit l'identité, soit la réflexion d'axe (AB).

Exercice 13. Vrai ou faux?

1. Il est impossible qu'une homothétie de rapport $k \neq 1$ soit une rotation.
2. Il existe une unique homothétie transformant le cercle \mathcal{C}_1 d'équation $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ en le cercle \mathcal{C}_2 d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.
3. La composée de deux rotations affines est une rotation.

Exercice 14.

Soient r_1 la rotation affine de centre Ω_1 qui transforme A_1 en B_1 et r_2 la rotation affine de centre Ω_2 qui transforme A_2 en B_2 . On suppose que $r_2 \circ r_1$ est une rotation. Comment peut-on construire, à la règle et au compas, le centre de la rotation $r_2 \circ r_1$?

Exercice 15.

Quelles sont les isométries qui laissent globalement invariant un cercle donné?

Exercice 16.

1. Soit A, B et C trois points du plan distincts deux à deux et non alignés. Soient A' , B' et C' trois points du plan. Montrer qu'il existe une unique application affine f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.
2. On rappelle la définition donnée dans le TD2 : on dit que deux triangles sont isométriques si les longueurs de leurs côtés sont égales deux à deux. Montrer que deux triangles sont isométriques si, et seulement si, il existe une isométrie affine qui envoie le premier triangle sur le second.
3. On rappelle la définition donnée dans le TD2 : on dit que deux triangles sont semblables si leurs angles sont égaux deux à deux. Montrer que deux triangles sont semblables si, et seulement si, il existe une similitude affine qui envoie le premier triangle sur le second.

Exercice 17.

Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cercles de centres respectifs O et O' sécants en A et B . Soit S la similitude directe de centre A qui transforme O en O' . Soit M un point sur le cercle \mathcal{C} et M' son image par S alors les points M, B et M' sont alignés.

Exercice 18.

Montrer que le triangle de sommets $M_1(z_1), M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ est équilatéral si, et seulement si,

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Exercice 19. Théorème de Napoléon On construit un triangle ABC , quelconque, puis extérieurement, trois triangles équilatéraux ABM, BCN et ACP . Montrer que si G_1, G_2 et G_3 désignent les centres de gravité respectifs des trois triangles, alors $G_1 G_2 G_3$ est un triangle équilatéral.

Exercice 20. Démonstration du théorème de Thalès par les projections

Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes du plan affine. Pour $A \in D_1$, l'application p_{A,D_1,D_2} qui fixe A et dont l'application linéaire associée est la projection vectorielle \vec{p} sur \vec{D}_1 parallèlement à \vec{D}_2 est appelée projection affine sur \vec{D}_1 parallèlement à \vec{D}_2 . On a : $p_{A,D_1,D_2} : M \mapsto A + \vec{p}\vec{AM}$.

1. Montrer que p_{A,D_1,D_2} fixe tous les points de D_1 .
2. Montrer que la définition d'une projection affine ne dépend pas du choix de A . On pourra donc noter plus simplement p_{D_1,D_2} .
3. Une projection affine est-elle une similitude affine ?
4. Déterminer $\text{Im}(p_{D_1,D_2})$.
5. Démontrer le théorème de Thalès en utilisant une projection.

Exercice 21. Théorème de Ménélaüs

Soit ABC un triangle. Soient M, N, P trois points appartenant respectivement aux

droites $(BC), (CA)$ et (AB) distincts des sommets A, B, C du triangle. Alors M, N et P sont alignés si, et seulement si,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1.$$

Indication : on pourra considérer la composée des homothéties h_1 et h_2 où h_1 est de centre M et qui transforme B en C et où h_2 est de centre N et qui transforme C en A .

Exercice 22. Théorème de Céva

Soit ABC un triangle. Soient A', B', C' trois points appartenant respectivement $(BC), (CA)$ et (AB) distincts des sommets A, B, C du triangle. Alors les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles ou concourantes si, et seulement si,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Indication : on pourra appliquer le théorème de Thalès dans les cas où les droites sont parallèles et le théorème de Ménélaüs dans le cas où les droites sont concourantes.

Exercice 23. Théorème de Pappus affine

Soient trois points alignés A, B, C et trois autres points également alignés A', B', C' . Montrer que si (AB') est parallèle à (BA') et si (BC') est parallèle à (CB') , alors (AC') est parallèle à (CA') .

Exercice 24. Théorème de Desargues

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommets communs et à côtés respectivement parallèles.

1. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles.
2. Montrer de plus que, dans le cas où elles sont concourantes, si on note $R = (AB) \cap (A'B'), P = (AC) \cap (A'C')$ et $Q = (BC) \cap (B'C')$, alors les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 25. Théorème du papillon

Soient $[PQ]$ une corde d'un cercle \mathcal{C} . On

note M le milieu de $[PQ]$ et on considère deux cordes $[AB]$ et $[CD]$ de \mathcal{C} passant par M . Par ailleurs, on note X et Y les intersections de AD et CB avec PQ . Montrer que M est aussi le milieu de $[XY]$.

Indication : On pourra considérer les quatre projetés orthogonaux de X et Y sur (AB) et (CD) puis identifier des couples de triangles semblables.

Exercice 26.

Soit E un plan affine. Soit $f : E \rightarrow E$ une application. Montrer que f est affine si, et seulement si, f conserve les barycentres.

Exercice 27. Groupe diédral

1. Soit $n \geq 3$. Soient A_1, \dots, A_n des points d'un cercle \mathcal{C} . Montrer qu'une isométrie affine laissant globalement invariant $\{A_1, \dots, A_n\}$ fixe le point O .
2. Dans toute cette question, on considère un polygone régulier $A_1 \dots A_n$ inscrit dans un cercle \mathcal{C} .

(a) Montrer que l'ensemble des isométries affines laissant globalement invariant $\{A_1, \dots, A_n\}$ est isomorphe à un sous-groupe $D_{A_1 \dots A_n}$ de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$. Montrer de plus que $D_{A_1 \dots A_n}$ ne dépend que de n . On notera par la suite D_n ce sous-groupe (appelé groupe diédral d'indice n).

(b) Montrer qu'il existe une rotation vectorielle r et une réflexion vectorielle s qui engendrent D_n et telles que

$$r^n = Id \quad s^2 = Id \quad \text{et} \quad sr = r^{n-1}s$$

(c) En déduire que $|D_n| = 2n$.

(d) Montrer que $D_3 \simeq \mathfrak{S}_3$.

(e) Déterminer l'ensemble des sous-groupes de D_4 .

3. Soit $G \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ un sous-groupe d'ordre fini. Montrer que G est un groupe cyclique ou à un groupe diédral.

Chapitre 5

Courbes paramétrées en cartésiennes

I. Introduction

Définition 5.1

Une courbe paramétrée est une application

$$M: \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t) \end{cases}$$

où $I \subset \mathbb{R}$ est une partie de \mathbb{R} (souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles).

Remarque. En pratique, on supposera souvent que M est de classe C^∞ pour que ce dont on parle ait un sens. De plus, on suppose que $M(t)$ est donné par ses coordonnées cartésiennes

en posant $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Définition 5.2

On définit :

- le vecteur vitesse du point $M(t)$ le vecteur $M'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.
- le vecteur accélération du point $M(t)$ le vecteur $M''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

Remarque. Attention, $M(t)$ est un point alors que $M'(t)$ et $M''(t)$ sont des vecteurs. L'outil essentiel pour étudier une courbe paramétrée est la formule de Taylor-Young :

$$M(t) = M(t_0) + (t - t_0)M'(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^k}{k!}M^{(k)}(t_0) + (t - t_0)^k \vec{\epsilon}(t)$$

où $\vec{\epsilon}(t)$ tend vers $\vec{0}$ si t tend vers t_0 .

Exemple. $M(t) = (\cos(t), \sin(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Si on prend $M(t) = (\cos(3t), \sin(3t))$, l'ensemble image est le même mais le « mouvement » ne sera pas le même

Définition 5.3

Si $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée, on appelle support de cette courbe l'ensemble $M(I)$.

Remarque. En pratique, on s'intéresse essentiellement au support d'une courbe puisqu'il s'agit principalement d'être capable de le tracer. Ainsi, la vitesse de parcours et les retours en arrière n'auront pas d'importance.

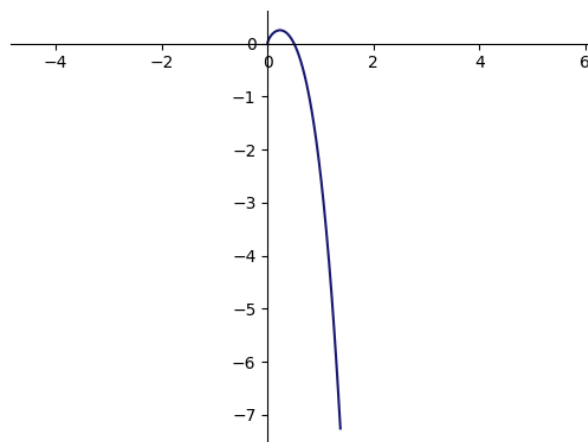
Exemple. Étudier la courbe $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^2 - t^4$.

Solution :

$x'(t) = 2t$ et $y'(t) = 2t - 4t^3 = 2t(2t^2 - 1)$

t	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$x'(t)$		-	0	+	
$x(t)$	$+\infty$		1		$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$		0		$-\infty$
$y'(t)$		+	0	+	0

Par parité, on pouvait en fait réduire le domaine d'étude à l'intervalle $[0; +\infty[$. On obtient la courbe suivante :



II. Réduction du domaine d'étude

On rappelle l'effet de quelques transformations géométriques f sur le point $M(x, y)$:

- Translation de vecteur $\vec{u}(a, b)$: $f(M) = (x + a, y + b)$
- Réflexion d'axe (Ox) : $f(M) = (x, -y)$
- Réflexion d'axe (Oy) : $f(M) = (-x, y)$
- Symétrie centrale de centre O : $f(M) = (-x, -y)$
- Symétrie centrale de centre I : $f(M) = (2a - x, 2b - y)$
- Réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice) : $f(M) = (y, x)$
- Réflexion d'axe la droite d'équation $y = -x$ (deuxième bissectrice) : $f(M) = (-y, -x)$
- Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O : $f(M) = (-y, x)$
- Rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre O : $f(M) = (y, -x)$

Remarque. La transformation $t \longrightarrow \frac{1}{t}$ doit être essayée en présence de \ln ou de fractions rationnelles

$$\ln(t) \longrightarrow \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln(t)$$

Exemple. Réduire au maximum le domaine d'étude de la courbe

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$$

Solution :

x et y sont 2π périodiques.

De plus, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On étudie donc la courbe sur $[0, \pi]$ puis on en déduit la courbe sur $[-\pi, \pi]$ par réflexion d'axe (Ox) .

Exemple. Réduire au maximum le domaine d'étude de la courbe

$$\begin{cases} x(t) = t - \frac{3}{2} \sin(t) \\ y(t) = t - \frac{3}{2} \cos(t) \end{cases}$$

Solution :

$x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$ et $y(t + 2\pi) = y(t) + 2\pi$. Ainsi, on étudie la courbe sur $[0, 2\pi]$ puis on déduit la courbe sur chaque intervalle de la forme $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ par une translation de vecteur $\vec{u}(2k\pi; 2k\pi)$.

Exemple. Réduire au maximum le domaine d'étude de la courbe

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$$

Solution :

$$x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t) \text{ et } y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t).$$

Ainsi, on étudie la courbe sur $[0, 1]$ puis on en déduit la courbe sur $[0, +\infty[$ par réflexion d'axe la première bissectrice.

Enfin, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$.

On en déduit donc la courbe sur \mathbb{R} par symétrie centrale de centre O .

III. Points multiples

Définition 5.4

Soit $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée. On dit qu'un point A est multiple s'il existe $s, t \in I$ avec $s \neq t$ tels que $M(t) = M(s)$. Le cardinal de l'ensemble $\{t \in I \mid M(t) = A\}$ est appelé la multiplicité de A .

Remarque. Lorsqu'une courbe paramétrée est T -périodique (c'est-à-dire si $\forall t \in I, M(t + T) = M(t)$), tous ses points sont multiples. En pratique, on cherche les points multiples qui ne proviennent pas de la périodicité.

Exemple. Chercher les points multiples de la courbe

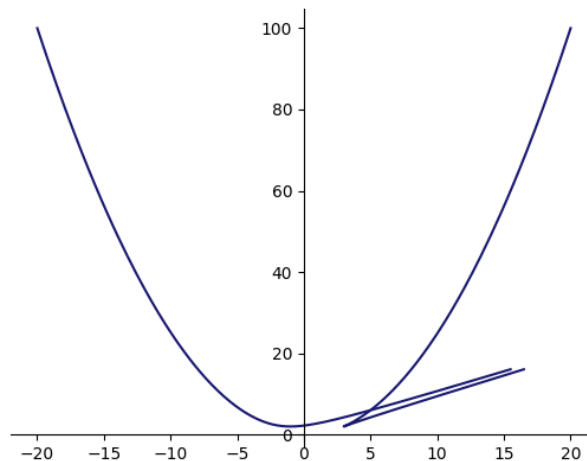
$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

Solution :

Soient $s, t \in \mathbb{R}^*$ avec $s \neq t$.

$$\begin{aligned} M(t) = M(s) &\iff \begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t^2 + \frac{2}{t} = s^2 + \frac{2}{s} \\ t^2 + \frac{1}{t^2} = s^2 + \frac{1}{s^2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t^2 - s^2 = \frac{2}{s} - \frac{2}{t} \\ t^2 - s^2 = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{t^2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (t-s)(t+s) = \frac{2(t-s)}{st} \\ t^2 - s^2 = \frac{t^2 - s^2}{s^2 t^2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (t+s) = \frac{2}{st} \\ s^2 t^2 = 1 \quad \text{car } s \neq t \text{ et } s \neq -t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (t+s) = \pm 2 \\ st = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, s et t sont racines de $X^2 - 2X - 1$ ou de $X^2 + 2X + 1$. Ainsi, on obtient $s = 1 - \sqrt{2}$ et $t = 1 + \sqrt{2}$ ou réciproquement.



IV. Tangentes et allures locales

1. Tangentes

Définition 5.5

On dit qu'une courbe paramétrée $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ admet une tangente en $M(t_0)$ si le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ admet une limite non nulle \vec{v} quand t tend vers t_0 . Dans ce cas, la tangente en $M(t_0)$ est la droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur \vec{v} .

On se propose de déterminer la tangente à une courbe paramétrée en un point. On utilise le développement de Taylor suivant :

$$M(t) = M(t_0) + (t - t_0)M'(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^k}{k!}M^{(k)}(t_0) + (t - t_0)^k\vec{\epsilon}(t)$$

Si on veut utiliser ce DL, il faut qu'il y ait un terme dans la somme. On suppose qu'il y a une dérivée k^e non nulle et on note $p \in \mathbb{N}^*$ le premier entier tel que $M^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$.

Définition 5.6

p est appelé premier entier fondamental en t_0 et on a :

$$M(t) = M(t_0) + \frac{(t - t_0)^p}{p!}M^{(p)}(t_0) + (t - t_0)^p\vec{\epsilon}(t)$$

Remarque. Le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ dirige la sécante $(M(t_0)M(t))$ donc $\frac{p!}{(t - t_0)^p}\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ aussi. D'après le DL, ce vecteur tend vers $M^{(p)}(t_0)$ lorsque t tend vers t_0 .

Proposition 5.1

Si p est le premier entier fondamental, la tangente à la courbe au point $M(t_0)$ est la droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $M^{(p)}(t_0)$.

Définition 5.7

- Si $M'(t_0) = \vec{0}$, on dit que $M(t_0)$ est un point singulier.
- Si $M'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que $M(t_0)$ est un point régulier.

Exemple. Chercher les points singuliers de la courbe

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

Solution :

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{cases} x'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} \\ y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} \end{cases}$$

Ainsi,

$$M'(t) = 0 \iff \begin{cases} 2t = \frac{2}{t^2} \\ 2t = \frac{2}{t^3} \end{cases} \iff \begin{cases} t^3 = 1 \\ t^4 = 1 \end{cases} \iff t = 1$$

Finalement, $M(1) = (3, 2)$ est l'unique point singulier de la courbe.

2. Classification des allures locales

On se propose d'étudier la position de la courbe par rapport à une de ses tangentes. On suppose qu'il existe $k > p$ tel que $(M^{(p)}(t_0), M^{(k)}(t_0))$ forme une base du plan. On note q le plus petit entier vérifiant cette condition.

Définition 5.8

q est appelé deuxième entier fondamental en t_0 et on a :

$$M(t) = M(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}(1+P(t))M^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!}M^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^p\vec{\epsilon}(t)$$

où P est un polynôme tel que $P(t_0) = 0$.

On pose $a(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!}(1+P(t))$ et $b(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!}$. Ainsi,

$$M(t) = M(t_0) + a(t)M^{(p)}(t_0) + b(t)M^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^p\vec{\epsilon}(t)$$

En notant $X(t)$ et $Y(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère $(M(t_0), M^{(p)}(t_0), M^{(q)}(t_0))$, on obtient :

$$X(t) = a(t) + o((t-t_0)^q) \quad Y(t) = b(t) + o((t-t_0)^q)$$

On remarque alors que $\frac{X(t)}{(t-t_0)^p} \rightarrow \frac{1}{p!}$ et que $\frac{Y(t)}{(t-t_0)^q} \rightarrow \frac{1}{q!}$ donc que, au voisinage de t_0 , $X(t)$ est du signe de $(t-t_0)^p$ et $Y(t)$ est du signe de $(t-t_0)^q$.

Il suffit de discuter des parités de p et q .

	q est pair	q est impair
p est impair	allure banale	point d'inflexion
p est pair	rebroussement de seconde espèce	rebroussement de première espèce

Remarque. Si $M(t_0)$ est un point de rebroussement, c'est un point singulier. La réciproque est fautive.

3. Recherche des inflexions

Pour chercher des inflexions sans avoir à calculer p et q pour tous les points, on remarque que si p et q sont impairs, on a :

- Si $p = 1$ et $q \geq 3$, la vitesse et l'accélération sont colinéaires
- Si $p \geq 3$, la vitesse est nulle.

Ainsi, on a la proposition suivante :

Proposition 5.2

Si $M(t)$ est un point d'inflexion, alors

$$\det(M'(t), M''(t)) = 0.$$

Remarque. La réciproque est fautive, par exemple si $p = 1$ et $q = 4$ (allure banale).

Exemple. Chercher les points d'inflexions éventuels de la courbe

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

Solution :

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$M'(t) = \begin{pmatrix} 2t - \frac{2}{t^2} \\ 2t - \frac{1}{t^3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M''(t) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{t^3} \\ 2 + \frac{4}{t^4} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \det(M'(t), M''(t)) &= \left(2t - \frac{2}{t^2}\right) \left(2 + \frac{6}{t^4}\right) - \left(2t - \frac{2}{t^3}\right) \left(2 + \frac{4}{t^3}\right) \\ &= -\frac{4}{t^6} (3t^4 - 4t^3 + 1) \\ &= \frac{-4(t-1)^2(3t^2 + 2t + 1)}{t^6} \end{aligned}$$

et on a $\det(M'(t), M''(t)) = 0 \iff t = 1$. On cherche ensuite à savoir si $M(1)$ est un point d'inflexion.

$M'(1) = \vec{0}$ et $M''(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ donc on a $p = 2$. Cela signifie que $M(1)$ est un point de rebroussement et non un point d'inflexion. Par conséquent, la courbe n'admet aucun point d'inflexion (voir courbe page 71).

V. Branches infinies

Définition 5.9

On dit que la courbe paramétrée $M(t)$ admet une branche infinie au voisinage de t_0 (ou au voisinage de $\pm\infty$) si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ ou $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$.

- Si $x(t) \rightarrow a \in \mathbb{R}$ et $y(t) \rightarrow \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est asymptote.
- Si $x(t) \rightarrow \pm\infty$ et $y(t) \rightarrow a$, la droite d'équation $y = a$ est asymptote.

Lorsque $x(t) \rightarrow \pm\infty$ et $y(t) \rightarrow \pm\infty$, il faut étudier la limite de $\frac{y(t)}{x(t)}$.

- Si $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow \pm\infty$, on a une branche parabolique dans la direction (Oy) .
- Si $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow a \in \mathbb{R}$, on a une branche parabolique dans la direction $y = ax$.

Dans le dernier cas, on étudie $y - ax$ pour voir s'il y a une droite asymptote, ce qui est le cas si, et seulement si, $y(t) - ax(t) \rightarrow b \in \mathbb{R}$.

Exemple. Déterminer les branches infinies de la courbe

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = 2t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

Solution :

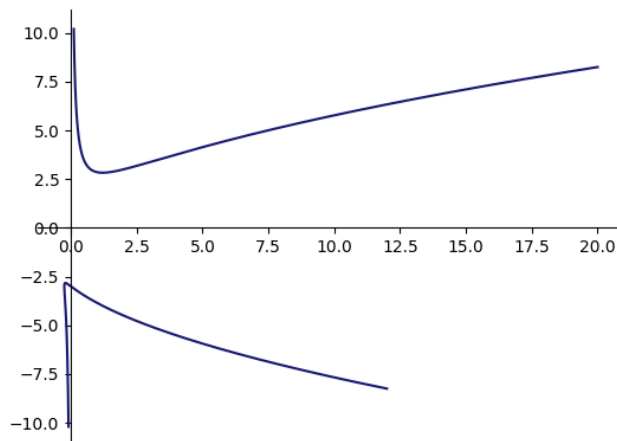
En 0^+ : $x(t) \rightarrow 0$ et $y(t) \rightarrow +\infty$. Donc la courbe admet pour asymptote la droite d'équation $x = 0$.

Idem en 0^- car $x(t) \rightarrow 0$ et $y(t) \rightarrow -\infty$.

En $+\infty$: $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow 0$ donc on a une branche parabolique dans la direction (Ox) .

En revanche il n'y a pas d'asymptote oblique car $y(t) - 0x(t) \rightarrow +\infty$.

Idem en $-\infty$.



VI. Plan d'étude

Méthode – Étude d'une courbe paramétrée en cartésiennes

1. Ensemble de définition et réduction du domaine d'étude
2. Étude des variations
3. Recherche des points singuliers et, parmi eux, des points de rebroussement
4. Recherche des points multiples
5. Recherche des points d'inflexions (si possible)
6. Étude des branches infinies
7. Tracer la courbe

Exemple. Étudier la courbe

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{t^2 - 1} \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$$

Solution :

1. Domaine d'étude :

$M(t)$ est défini pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

$x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. Ainsi, on étudie la courbe sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. La courbe sur $\mathbb{R}^- \setminus \{-1\}$ est alors obtenue par symétrie par rapport à l'axe (Oy).

2. Variations :

$$x'(t) = \frac{3t^2(t^2 - 1) - t^3 \times 2t}{(t^2 - 1)^2} = \frac{t^4 - 3t^2}{(t^2 - 1)^2} = \frac{t^2(t^2 - 3)}{(t^2 - 1)^2}$$

$$y'(t) = 2t$$

t	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x'(t)$		$+$ 0 $-$		$-$ 0 $-$		$-$ 0 $+$	
$x(t)$	$-\infty$	\nearrow \searrow	$+\infty$	\searrow $-\infty$	$+\infty$	\searrow \nearrow	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	\searrow					$+\infty$
			-1				
$y'(t)$		$-$	$-$	$-$ 0 $+$	$+$	$+$	$+$

3. Points singuliers :

$M'(0) = \vec{0}$ ($M(0)$ est le seul point singulier).

$y''(t) = 2$ et $y'''(t) = 0$.

Pour déterminer $x''(0)$, $x'''(0)$, etc, on fait un DL en 0 :

$$\frac{t^3}{t^2 - 1} = -t^3(1 + t^2 + o(t^2)) = -t^3 - t^5 + o(t^5)$$

Ainsi, $x^{(3)}(0) = -1$ et $x^{(5)}(0) = -1$.

On en déduit que $p = 2$ et $q = 3$ (on a un rebroussement de première espèce en $M(0)$).

4. Points multiples :

Soient $s, t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} M(t) = M(s) &\iff \begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{t^3}{t^2-1} = \frac{s^3}{s^2-1} \\ t^2-1 = s^2-1 \end{cases} \\ &\iff s = t \end{aligned}$$

Il n'y a donc aucun point double.

5. Points d'inflexions :

Après calcul, on a $x''(t) = \frac{2t(t^2-1)(t^2+3)}{(t^2-1)^4}$

$y''(t) = 2$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \det(M'(t), M''(t)) &= \left(\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2} \right) \times 2 - 2t \times \left(\frac{2t(t^2-1)(t^2+3)}{(t^2-1)^4} \right) \\ &= \frac{-2t^2(t^4-6t^2-3)}{(t^2-1)^3} \end{aligned}$$

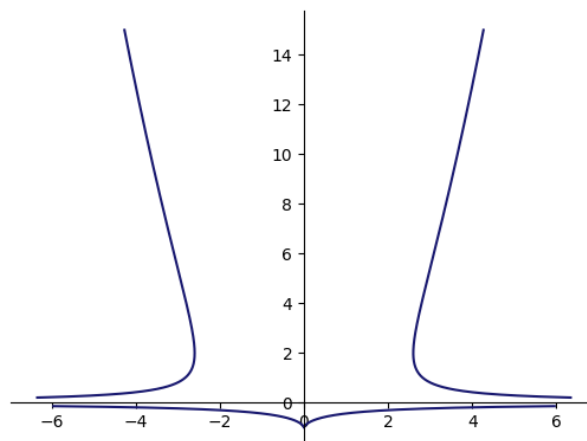
et on a $\det(M'(t), M''(t)) = 0 \iff t = 0$ ou $t = \sqrt{3+2\sqrt{3}}$. On cherche ensuite à savoir si ces points sont des points d'inflexion.

$M(0)$ est un rebroussement. Pour $t = \sqrt{3}$, on a $p = 1$ et $q = 3$.

$M(\sqrt{3+2\sqrt{3}})$ est un point d'inflexion car $p = 1$ et $q = 3$ (on montre que $x'''(\sqrt{3+2\sqrt{3}}) \neq 0$)

6. Branches infinies :

En 1 : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote. En $+\infty$: $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow +\infty$. On a donc une branche parabolique dans la direction (Oy) .



VII. Exercices

Exercice 1.

Étudier la courbe paramétrée définie par

$$x(t) = -t + t^2 \quad y(t) = t^2 + t^3$$

Exercice 2.

Étudier la courbe paramétrée définie par

$$x(t) = 3t^2 - 2t^3 \quad y(t) = 4t - t^4$$

Exercice 3. Lemniscate de Bernoulli

Étudier la courbe paramétrée définie par

$$x(t) = \frac{t}{1+t^4} \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$$

Exercice 4.

Étudier la courbe paramétrée définie par

$$x(t) = \exp(\sin(2t)) \quad y(t) = \exp(\cos(t))$$

Exercice 5. Astroïde

- Étudier la courbe paramétrée définie par

$$x(t) = \cos^3(t) \quad y(t) = \sin^3(t)$$

- On note Γ l'arc paramétré. Soit $M \in \Gamma$ qui n'est pas sur l'un des axes des coordonnées. La tangente à Γ en M coupe les axes en A et B . Montrer que la distance AB est constante.

Exercice 6. Courbe de Lissajous

Étudier la courbe paramétrée définie par

$$x(t) = \sin(3t) \quad y(t) = \cos(5t)$$

Exercice 7. Folium de Descartes

- Étudier la courbe paramétrée définie par

$$x(t) = \frac{t}{1+t^3} \quad y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}$$

- Montrer que $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont alignés si, et seulement si, $t_1 t_2 t_3 = -1$.

- Montrer que la tangente en $M(t)$ (pour $t \neq -1$ et $t \neq 0$), coupe la courbe en un point $M(s)$ avec $s \neq t$. Déterminer ensuite s .

Exercice 8.

On fait rouler sans glissement un cercle de rayon 1 sur l'axe (Ox). Déterminer et tracer la courbe décrite par un point du cercle.

Exercice 9.

Soit \mathcal{H} l'hyperbole d'équation $xy = 1$. Déterminer et tracer le lieu des projetés orthogonaux de O sur les tangentes de \mathcal{H} .

Exercice 10.

Soit l'arc paramétré défini par

$$x(t) = \frac{t - \sin(t)}{t^2} \quad y(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}.$$

Montrer qu'il peut être prolongé continûment pour tout $t \in \mathbb{R}$ et qu'il possède un axe de symétrie. Montrer qu'il possède une infinité de points de rebroussement situés sur un même cercle, et que les tangentes en ces points sont concourantes. Tracer l'arc.

Exercice 11.

Soit l'arc paramétré défini par

$$x(t) = t^2 + t \quad y(t) = 2t + \frac{1}{t}.$$

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les trois points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ soient alignés.
- Montrer que l'arc paramétré admet exactement trois points d'inflexion et qu'ils sont alignés.

Exercice 12. Bicornes

Étudier l'arc paramétré défini par

$$x(t) = \sin(t) \quad y(t) = \frac{\cos^2(t)}{2 - \cos(t)}.$$

Annexes

Chapitre A

Mesure des angles orientés

I. Introduction

La notion d'angle est directement liée à des questions portant sur le choix d'une base. En effet, on a l'habitude de considérer que la base canonique de \mathbb{R}^2 est (\vec{i}, \vec{j}) , où $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce choix semble effectivement « naturel » étant donné qu'il permet d'écrire que tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se décompose de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Dans ce cadre, il est alors raisonnable de considérer que les angles du plan soient orientés dans le sens anti-horaire afin que la mesure de l'angle (\vec{i}, \vec{j}) soit $+\frac{\pi}{2}$ et non pas $-\frac{\pi}{2}$. Mais que se passerait-il si l'on permuteait \vec{i} et \vec{j} en considérant que la base canonique soit désormais (\vec{j}, \vec{i}) ? Outre que cela rendrait justice à de nombreuses générations de collégiens qui ont toujours confondu l'axe des abscisses et celui des ordonnées, les coordonnées des vecteurs se liraient « naturellement » de bas en haut et il faudrait alors considérer que le sens direct correspond au sens horaire.

Cette remarque ne concerne d'ailleurs pas que la base canonique, mais vaut pour n'importe quelle base orthonormée du plan. Finalement, il y a toujours deux choix possibles : celui menant à privilégier le sens horaire et celui menant au sens anti-horaire. Se pose alors une question : lorsque l'on considère une base, comment savoir dans quel cas on se trouve? Autrement dit, si l'on se donne deux bases orthonormées, conduisent-elles à privilégier la même orientation pour les angles ou bien l'orientation opposée? On va voir que la réponse est à chercher dans le signe du déterminant de la matrice de passage entre les deux bases.

II. Bases directes et indirectes

On se place ici dans un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire). Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormées, on sait que la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' est une matrice orthogonale. Son déterminant est donc $+1$ ou -1 .

Sur l'ensemble des bases orthonormées de E , on définit la relation suivante : on dit que deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont équivalentes si la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' a un déterminant $+1$.

Il est alors facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence (la preuve est laissée au lecteur). Lorsque deux bases orthonormées sont équivalentes, on dit qu'elles ont la **même orientation**.

On choisit arbitrairement une base orthonormée \mathcal{B}_0 parmi l'ensemble des bases orthonormées de E . Il existe ainsi deux classes d'équivalences pour notre relation :

- la classe des bases orthonormées qui sont en relation avec \mathcal{B}_0 (c'est-à-dire dont le déterminant dans la base \mathcal{B}_0 est $+1$). On les appelle les **bases orthonormées directes**.
- la classe formée par les autres bases (elles sont toutes en relation entre elles, ce sont les bases orthonormées dont le déterminant dans la base \mathcal{B}_0 est -1). On les appelle les **bases orthonormées indirectes**.

Remarque.

- *Il est clair que la distinction entre bases orthonormées directes et indirectes dépend du choix d'une base de référence \mathcal{B}_0 .*
- *Dans le cas où l'espace euclidien est \mathbb{R}^n , on prendra bien entendu pour \mathcal{B}_0 la base canonique.*
- *On abrégera généralement les termes « bases orthonormées directes » en BOND et « bases orthonormées indirectes » en BONI.*

La proposition suivante exprime le fait que, par un changement de base orthonormée, le déterminant d'une famille de vecteur reste le même ou est changé en son opposé selon que les deux bases ont même orientation ou non. Sa démonstration pourra être omise en première lecture. L'exemple qui suit est en revanche éclairant.

Proposition A.1

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées d'un espace euclidien E de dimension n . Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in E$. Alors,

- Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont la même orientation,

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$$

- Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont une orientation différente,

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = -\det_{\mathcal{B}'}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$$

Démonstration. On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$. On note p l'endomorphisme de E qui envoie \mathcal{B} sur \mathcal{B}' (c'est-à-dire tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\vec{e}'_i = p(\vec{e}_i)$). La matrice de p dans la base \mathcal{B} est donc la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' . Son déterminant est ± 1 .

On sait par ailleurs que l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E^n est une droite vectorielle. Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det_{\mathcal{B}} = \lambda \det_{\mathcal{B}'}$.

En évaluant en la famille $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$, on obtient :

$$\lambda = \det_{\mathcal{B}}(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n) = \det_{\mathcal{B}}(p(\vec{e}_1), \dots, p(\vec{e}_n)) = \det(p) \det_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \det(p)$$

Or, $\det(p) = \pm 1$ selon que les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont toutes les deux de même orientation ou non, d'où le résultat. \square

Exemple. On se place dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 et on considère la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et la base $\mathcal{B}' = (\vec{j}, \vec{i})$. On pose $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) &= \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{i} + 2\vec{j}, 3\vec{i} + 4\vec{j}) \\ &= \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{i}, 4\vec{j}) + \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(2\vec{j}, 3\vec{i}) \quad \text{par multilinéarité et caractère alterné} \\ &= 4 - 6 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Si l'on calcule maintenant $\det_{(\vec{j}, \vec{i})}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, on a :

$$\begin{aligned} \det_{(\vec{j}, \vec{i})}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) &= \det_{(\vec{j}, \vec{i})}(\vec{i} + 2\vec{j}, 3\vec{i} + 4\vec{j}) \\ &= \det_{(\vec{j}, \vec{i})}(\vec{i}, 4\vec{j}) + \det_{(\vec{j}, \vec{i})}(2\vec{j}, 3\vec{i}) \quad \text{par multilinéarité et caractère alterné} \\ &= -4 + 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

On voit que le déterminant de la famille (\vec{v}_1, \vec{v}_2) change effectivement de signe lorsqu'on l'exprime dans les bases (\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{j}, \vec{i}) . Cela est dû au fait que ces deux bases n'ont pas la même orientation.

III. Angles du plan

Afin de définir correctement la mesure d'un angle entre deux vecteurs, on va procéder, pour ainsi dire, à l'envers. On commence en effet par définir la fonction cosinus. La définition des angles sera alors exprimée à l'aide de la fonction arccos.

Définition A.1

La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ a un rayon de convergence ∞ . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\cos(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Il est possible de montrer que la fonction cosinus ainsi définie est 2π périodique (c'est d'ailleurs comme cela qu'on définit π) et qu'elle est bijective de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1]$. On définit donc, classiquement, la fonction arccos comme étant la fonction réciproque de cette bijection.

Définition A.2

Soit E un plan vectoriel euclidien dont on a choisi une base \mathcal{B} orthonormée directe. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ deux vecteurs non nuls. On définit, modulo 2π , la mesure de l'angle entre \vec{u} et \vec{v} , notée (\vec{u}, \vec{v}) , de la façon suivante :

- Si $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$,

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$$

- Si $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) < 0$,

$$(\vec{u}, \vec{v}) = -\arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$$

Remarque. La définition est légitime car, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, $-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$. De plus, la proposition A.1 montre que la définition ci-dessus ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. On retiendra cependant que la notion d'angle orienté ne peut exister sans avoir, au préalable, choisi, arbitrairement, quelles étaient les BOND et quelles les BONI. C'est ce que l'on appelle « orienter le plan ». Naturellement, et comme on l'a déjà dit, dans le cas de l'espace euclidien \mathbb{R}^2 , on choisit la base canonique comme BOND.

Proposition A.2

Soit E un plan euclidien dont on a choisi une base \mathcal{B} orthonormée directe. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ deux vecteurs non nuls. On a :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{et} \quad \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

Démonstration. La première égalité découle immédiatement de la définition A.2. Pour la seconde égalité, il convient de rappeler que la définition de la fonction sinus est donnée par l'expression de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. On peut montrer par ailleurs que la fonction sinus est positive sur $[0, \pi]$ et négative sur $[-\pi, 0]$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ainsi, la définition A.2 permet de voir que, quelle que soit la mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) , les réels $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ ont le même signe. Pour montrer la seconde égalité, il suffit donc de montrer que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 + \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, 0\vec{v})^2 = 1$$

Cela se fait facilement en décomposant les vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans la base \mathcal{B} et en calculant l'expression obtenue. \square

IV. Angles de l'espace

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 dont on a choisi une base \mathcal{B} orthonormée directe. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ deux vecteurs non nuls. On considère le plan $P =$

$\text{Vect}(\vec{u}; \vec{v})$. Tout le problème réside dans le fait qu'il n'y a pas de façon « naturelle » d'orienter le plan P car on ne dispose pas d'une base « canonique » de P .

En réfléchissant un peu, on se rend d'ailleurs compte que, en prenant par exemple le cas de \mathbb{R}^3 , la mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$ ne sera pas de même signe selon qu'on la « regarde » en se plaçant « au dessus » du plan P ou « en dessous ». Cela signifie que le fait de s'être donné une orientation de l'espace (c'est-à-dire d'avoir choisi une base orthonormée directe), n'est pas suffisant et n'induit pas « naturellement » une orientation du plan P . Afin de définir l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$, on va donc procéder de la manière suivante :

- Si $P = \text{Vect}(\vec{u}; \vec{v})$, on oriente la droite P^\perp en choisissant un vecteur directeur unitaire sur cette droite (il y a deux choix possibles). On note \vec{e}_3 ce vecteur directeur.
- On complète le vecteur \vec{e}_3 en une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de E .
- La mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) est, par définition, la mesure de cet angle dans le plan P en ayant choisi la base directe (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

Remarque. Une fois le vecteur \vec{e}_3 choisi, la mesure de l'angle ainsi défini ne dépend pas de la façon dont on complète ce vecteur en base orthonormée directe de E . En effet, si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}_3)$ sont deux bases orthonormées directes de E , alors (\vec{e}_1, \vec{e}_2) et (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) seront deux bases orthonormées de P qui auront la même orientation. Cela peut se voir en écrivant que $\det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}_3) = \det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$

Remarque. Si en choisissant \vec{e}_3 comme vecteur directeur de P^\perp , une base orthonormée directe obtenue est $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, il est clair qu'en choisissant $-\vec{e}_3$, une base orthonormée directe sera $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, -\vec{e}_3)$. Par conséquent, le choix de $-\vec{e}_3$ conduira à considérer qu'une base directe du plan P est (\vec{e}_2, \vec{e}_1) et il en découle que la valeur de l'angle sera de signe contraire dans les deux cas.

Dans un langage qui plaira aux bricoleurs du dimanche, on peut maintenant énoncer les résultats suivants.

Théorème A.3

Toute personne affirmant que « pour visser, il faut tourner dans le sens des aiguilles d'une montre » est une personne qui prend les vis de haut.

Corollaire A.4

La manipulation d'un tournevis la tête en bas est réservée à un public averti.

Chapitre B

Complément sur les barycentres

I. Coordonnées barycentriques et alignement de points

Proposition B.1

Soient A, B et C trois points du plan \mathcal{P} .

Soient M, M' et M'' trois points du plan de coordonnées barycentriques relativement à A, B et C les triplets (α, β, γ) , $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Les points M, M' et M'' sont alignés si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration. Par multilinéarité du déterminant, quitte à diviser chaque ligne par la somme de ses termes, on peut supposer que les coordonnées sont normalisées (elles vérifient, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$ et $\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 1$).

On va montrer que $\det(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$.

(Il est clair que M, M' et M'' sont alignés si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = 0$).

Comme $\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM'} = \beta'\overrightarrow{AB} + \gamma'\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM''} = \beta''\overrightarrow{AB} + \gamma''\overrightarrow{AC}$, on a :

$$\overrightarrow{MM'} = (\beta' - \beta)\overrightarrow{AB} + (\gamma' - \gamma)\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MM''} = (\beta'' - \beta)\overrightarrow{AB} + (\gamma'' - \gamma)\overrightarrow{AC}$$

Ainsi,

$$\det(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = (\beta' - \beta)(\gamma'' - \gamma) - (\gamma' - \gamma)(\beta'' - \beta)$$

Or, le calcul du déterminant donne :

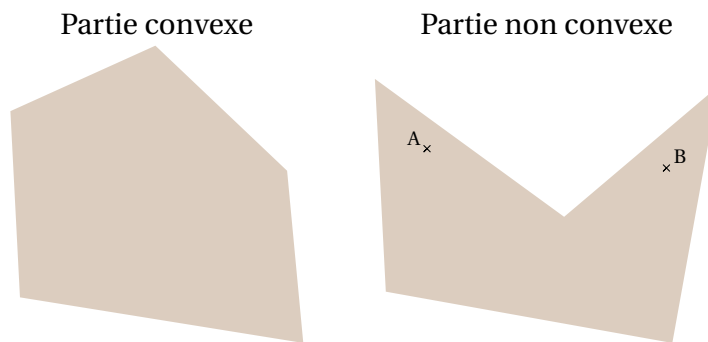
$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 1 & \beta' & \gamma' \\ 1 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' - \beta & \gamma' - \gamma \\ 0 & \beta'' - \beta & \gamma'' - \gamma \end{vmatrix} = (\beta' - \beta)(\gamma'' - \gamma) - (\gamma' - \gamma)(\beta'' - \beta)$$

Cela prouve bien que $\det(\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{MM''}) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$ et conclut la preuve. □

II. Barycentres et enveloppe convexe

Définition B.1

Une partie \mathcal{C} du plan est dite convexe si pour tous points A et B de \mathcal{C} , on a $[AB] \subset \mathcal{C}$.



Proposition B.2

Toute intersection de convexes est convexe.

Démonstration. Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille de parties convexes.

Montrons que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ est convexe.

Soient $A, B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$.

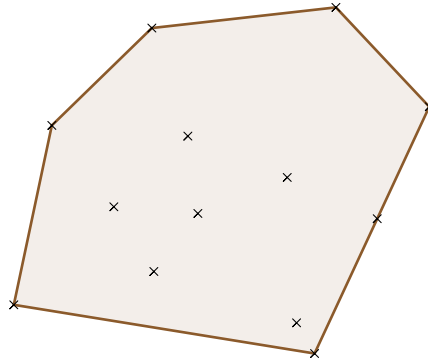
Pour tout $i \in I$, $A \in \mathcal{C}_i$ et $B \in \mathcal{C}_i$.

Donc, pour tout $i \in I$, $[AB] \subset \mathcal{C}_i$.

Par conséquent, $[AB] \subset \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$. □

Définition B.2

Soit \mathcal{S} une partie du plan. L'enveloppe convexe de \mathcal{S} , notée $\text{Conv}(\mathcal{S})$ est l'intersection de toutes les parties convexes du plan qui contiennent \mathcal{S} . Autrement dit, $\text{Conv}(\mathcal{S})$ est la plus petite partie convexe du plan qui contient \mathcal{S} .



Proposition B.3

Soit \mathcal{S} une partie du plan. $\text{Conv}(\mathcal{S})$ est exactement l'ensemble des barycentres des points de \mathcal{S} affectés de coefficients positifs ou nuls.

Démonstration. On note $\mathcal{P}os$ l'ensemble des barycentres des points de \mathcal{S} affectés de coefficients positifs ou nuls. Montrons que $\mathcal{P}os \subset \text{Conv}(\mathcal{S})$.

Pour cela, montrons par récurrence que $H(n)$: « Si M est le barycentre de n points de \mathcal{S} affectés de poids positifs, alors $M \in \mathcal{S}$ » est vraie pour tout $n \geq 2$.

Initialisation : Pour $n = 2$, soit M le barycentre de (S_1, α_1) et de (S_2, α_2) (avec $\alpha_1 \geq 0$ et $\alpha_2 \geq 0$).

Alors

$$\overrightarrow{S_1 M} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \overrightarrow{S_2 M}.$$

Comme $0 \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \leq 1$, on en déduit que $M \in [S_1 S_2]$ et donc que $M \in \text{Conv}(\mathcal{S})$.

Hérédité : Supposons que $H(n)$ est vraie.

Supposons que $M \in \mathcal{P}os$ est le barycentre de $n + 1$ points de \mathcal{S} , affectés de poids positifs :

$$(S_1, \alpha_1) \dots \dots (S_{n+1}, \alpha_{n+1})$$

On note N le barycentre des points $(S_1, \alpha_1), \dots, (S_n, \alpha_n)$.

Par hypothèse de récurrence, $N \in \text{Conv}(\mathcal{S})$.

Or, par associativité du barycentre, M est le barycentre de $(N, \sum_{i=1}^n \alpha_i), (S_{n+1}, \alpha_{n+1})$.

On en déduit donc que $M \in \text{Conv}(\mathcal{S})$ (cas $n = 2$). Ainsi, $H(n + 1)$ est vraie.

On a ainsi montré que $\mathcal{P}os \subset \text{Conv}(\mathcal{S})$.

Par ailleurs, $\mathcal{P}os$ est convexe. En effet, soient $M, N \in \mathcal{P}os$.

Soit $I \in [MN]$. Alors I est le barycentre de (M, IN) et de (N, IM) . Par associativité du barycentre, on en déduit que I est le barycentre de points de \mathcal{S} affectés de poids positifs, c'est-à-dire que $I \in \mathcal{P}os$.

Finalement, $\mathcal{P}os$ est une partie convexe telle que

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}os \subset \text{Conv}(\mathcal{S})$$

Cela signifie, par définition de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ que $\mathcal{P}os = \text{Conv}(\mathcal{S})$ □

Chapitre C

Isométries de l'espace

I. Isométries vectorielles de l'espace

Dans tout ce chapitre annexe, E désigne un espace vectoriel euclidien (muni d'un produit scalaire) de dimension 3.

1. Généralités sur les isométries vectorielles

Les définitions et premières propriétés données dans le chapitre sur les transformations du plan sont également valables en dimension supérieure. On rappelle succinctement ces résultats.

- Par définition, un endomorphisme $u : E \rightarrow E$ est une isométrie vectorielle si

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

L'ensemble des isométries vectorielles de E est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé groupe orthogonal de E et noté $O(E)$. Les isométries vectorielles sont aussi appelées endomorphismes orthogonaux.

- u est une isométrie vectorielle si, et seulement si, pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| = \|x\|$$

- u est une isométrie vectorielle si elle transforme toute base orthonormée en base orthonormée.
- Si u est une isométrie vectorielle, alors $\det(u) = \pm 1$ et $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{\pm 1\}$. De plus, en dimension 3, $Sp_{\mathbb{R}}(u) \neq \emptyset$ car tout polynôme réel de degré impair admet une racine dans \mathbb{R} .
- De la même manière qu'en dimension 2, si $\det(u) = 1$, on dit que l'isométrie est directe (on dit aussi positive) et si $\det(u) = -1$, on dit que l'isométrie est indirecte (on dit aussi négative). On note $SO(E)$ l'ensemble des isométries positives qui forment un sous-groupe de $O(E)$.

- $O_3(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), M^t M = I_2\}$, on a un isomorphisme entre $O(E)$ et $O_3(\mathbb{R})$.

Exemple. Symétries orthogonales d'un espace vectoriel de dimension 3

- Soit F un sous espace vectoriel de E avec $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. F est une droite ou un plan et on a $F \oplus F^\perp = E$. La symétrique orthogonale s par rapport à F (c'est-à-dire la symétrie par rapport à F , parallèlement à F^\perp) est une isométrie vectorielle.
- En effet, elle vaut Id sur F et $-Id$ sur F^\perp . Ainsi, en considérant une base de F et une base de F^\perp , on peut construire une base orthonormée dans laquelle la matrice de s est la matrice diagonale $(1, 1, -1)$ si F est un plan ou la matrice diagonale $(1, -1, -1)$ si F est une droite.
- Dans le cas où F est un plan, on dit que s est une réflexion.

Comme en dimension 2, les réflexions jouent un rôle fondamental en dimension 3. Elles engendrent $O(E)$ dans le sens suivant :

Proposition C.1

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Toute isométrie vectorielle de E , $u \in O(E)$ est une composée d'au plus trois réflexions.

Démonstration. La preuve qui suit est fortement inspirée du cas de la dimension deux. On traite d'abord le cas où l'endomorphisme admet un vecteur fixe puis on se ramène ensuite à ce cas. On considère $u \in O(E)$.

- Si u admet un vecteur fixe \vec{v}_0 , alors $F = Vect(\vec{v}_0)$ est une droite stable par u dont l'orthogonal est un plan également stable par u (démontrez le!). Ainsi, u restreint à F^\perp est une isométrie du plan et c'est donc la composée d'au plus deux réflexions de F^\perp , d'après la proposition 4.5. On note s'_1 et s'_2 ces réflexions et D_1 et D_2 leurs axes (on note D'_1 et D'_2 leur orthogonal dans le plan F^\perp , qui sont donc des droites). On va alors définir deux réflexions de E à partir de s'_1 et s'_2 .
On note $H_1 = D'_1 + Vect(\vec{v}_0)$ et $H_2 = D'_2 + Vect(\vec{v}_0)$. Alors H_1 et H_2 sont des plans et leur orthogonal sont respectivement D_1 et D_2 . On note s_1 la réflexion de E par rapport à H_1 et de même on note s_2 la réflexion de E par rapport à H_2 . Ainsi, $s_1(\vec{v}_0) = s_2(\vec{v}_0) = \vec{v}_0$ et s_1 et s_2 coïncident avec s'_1 et s'_2 sur F^\perp . En utilisant la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, on en déduit que u coïncide avec $s_1 \circ s_2$ sur l'espace E tout entier.
- Supposons maintenant que u n'admette pas de vecteur fixe. Nous allons, pour ainsi dire, en fabriquer un. Soit $\vec{v}_0 \in E$. On considère la réflexion s_1 qui envoie \vec{v}_0 sur $u(\vec{v}_0)$. En définissant $D = Vect(\vec{v}_0 - u(\vec{v}_0))$, il s'agit de la réflexion par rapport au plan D^\perp .
Au final, $s_1 \circ u$ est une isométrie qui admet un point fixe. C'est donc la composée d'au plus deux réflexions s_2 et s_3 d'après le premier point. On a donc $u = s_1 \circ s_2 \circ s_3$ et u est bien le produit d'au plus trois réflexions.

□

Remarque. Cette propriété se généralise facilement à tout espace vectoriel euclidien : en dimension n , toute isométrie vectorielle se décompose en produit d'au plus n réflexions (symétries orthogonales par rapport à un hyperplan).

La démonstration se fait par récurrence sur n et est identique à la démonstration faite ci-dessus.

2. Classification des isométries vectorielles

La proposition C.1 permet, là encore comme dans le cas de la dimension deux, de classer les isométries d'un espace de dimension trois.

- Soit u est le produit de zéro réflexion. On a $u = Id$.
- Soit u est le produit d'une seule réflexion. C'est une **réflexion**, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à un (hyper)plan. Dans une base orthonormée

bien choisie, sa matrice est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Soit u est la composée de deux réflexions s_1 et s_2 par rapport aux plans P_1 et P_2 (avec $P_1 \neq P_2$). Alors $D = P_1 \cap P_2$ est une droite et $u = s_1 \circ s_2$ admet donc tous les vecteurs de D comme vecteurs fixes et stabilise globalement le plan D^\perp . De plus, la restriction de u à D^\perp est une isométrie directe (on peut calculer le déterminant de u par bloc). C'est donc que cette restriction est une rotation du plan. Ainsi, dans une base orthonormée de E bien choisie, la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dit que u est une **rotation** vectorielle de l'espace.

Attention! On a envie de dire que θ est l'angle de la rotation. Il faut cependant rester prudent face aux problèmes d'orientations¹ car l'angle θ dépend de l'orientation choisie. Conformément à ce qui est expliqué dans l'annexe A, ce n'est qu'en choisissant une orientation de la droite D que l'angle θ peut être défini de manière unique (modulo 2π).

- Soit u est la composée de trois réflexions (différentes). La preuve précédente indique que cela se produit lorsque u n'admet pas de vecteur fixe. Autrement dit, 1 n'est pas valeur propre de u . Comme $Sp(u) \neq \emptyset$, c'est donc que -1 est valeur propre et qu'il existe un vecteur non nul \vec{v}_0 tel que $u(\vec{v}_0) = -\vec{v}_0$. La droite $D = Vect(\vec{v}_0)$ est stable par u et D^\perp est un plan stable par u . On peut donc construire une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On dit dans ce cas que u est une **anti-rotation**.

Les mêmes questions d'orientations se posent que pour une rotation.

Remarque. Le cas des symétries orthogonales par rapport à une droite (aussi appelées renversement) sont des cas particuliers de rotations avec $\theta = \pi$.

1. Qu'elles soient spatiales, politiques ou sexuelles.

II. Isométries affines de l'espace

1. Généralités sur les isométries affines

On rappelle succinctement les définitions et propriétés des applications affines et des isométries du plan qui se généralise aux espaces de dimension supérieure. Les preuves sont en tout point identiques à celles faites dans le chapitre 4.

Définition C.1

Soit $f : E \rightarrow E$ une application. On dit que f est une application affine s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall (A, B) \in E^2, \overrightarrow{f(A)f(B)} = g(\overrightarrow{AB}).$$

g est appelée la partie linéaire de f et on note $g = \vec{f}$.

Définition C.2

Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine. f est appelée une isométrie affine ssi,

$$\forall (A, B) \in E^2, d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

On note $\mathcal{I}(E)$ l'ensemble des isométries affines

- Une application affine f admet un unique point fixe, si et seulement si, 1 n'est pas une valeur propre de \vec{f} .
- La composée de deux applications affines est une application affine. L'inverse d'une application affine et bijective est une application affine. Par conséquent, l'ensemble des applications affines et bijectives de l'espace est un groupe.
- $\mathcal{I}(E) \subset \text{GA}(E)$ et $f \in \mathcal{I}(E) \iff \vec{f} \in \text{O}(E)$.

Avant de passer à la classification des isométries affines, on va néanmoins ajouter à la liste de résultats précédents un lemme qui s'avérera utile et qui viendra préciser le résultat de la proposition 4.13 du chapitre 4.

Lemme C.2

Soit f une isométrie affine de l'espace E n'admettant aucun point fixe. Il existe une isométrie g sans point fixe et une translation $t_{\vec{v}}$ de E telles que $f = t_{\vec{v}} \circ g$ et telles que le vecteur \vec{v} soit formé à partir de deux points fixes de g .

Démonstration. On s'inspire des preuves des propositions 4.13 et 4.26.

On considère un point O quelconque de E . En posant $\vec{v} = \overrightarrow{Of(O)}$ et $g = t_{-\vec{v}} \circ f$, il est clair que g admet O comme point fixe et on a $f = t_{\vec{v}} \circ g$.

Afin de montrer que \vec{v} peut-être formé à partir de deux points fixes de G , on aimerait montrer que $f(O)$ est également un point fixe de g . Cela ne sera pas possible immédiatement mais on va en fait montrer qu'en choisissant un autre point O' astucieusement, on pourrait être dans ce cas. On posera alors $\vec{v}' = \overrightarrow{O'f(O')}$ et le résultat sera démontré avec $g = t_{-\vec{v}'} \circ f$.

En fait, comme f n'admet pas de point fixe, 1 est valeur propre de \vec{f} . Cela signifie que

$\ker(\vec{f} - Id) \neq \{0\}$. On peut même montrer mieux :

$$E = \ker(\vec{f} - Id) \neq \{0\} \oplus \text{Im}(\vec{f} - Id) \neq \{0\}$$

Il suffit pour cela de démontrer qu'ils sont orthogonaux et de conclure par un argument de dimension (preuve laissée au lecteur).

Ainsi, en utilisant cette décomposition, il existe des vecteurs $x \in \ker(\vec{f} - Id) \neq \{0\}$ et $y \in E$ tels que

$$\overrightarrow{Of(O)} = x + \vec{f}(y) - y$$

On pose O' tel que $\overrightarrow{O'O} = y$. On a alors :

$$\overrightarrow{O'f(O')} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(O')} = y + x + \vec{f}(y) - y + \vec{f}(-y) = x.$$

Au final, $\overrightarrow{O'f(O')}$ est un vecteur fixe de \vec{f} . On peut donc maintenant conclure : en posant comme prévu $g = t_{\overrightarrow{O'f(O')}} \circ f$, on voit que O' est un point fixe de g . De plus, on montre facilement que $f(O')$ est un point fixe de g en utilisant le fait que le vecteur $\overrightarrow{O'f(O')}$ est un vecteur fixe de \vec{f} donc de \vec{g} (on a $\vec{f} = \vec{g}$). \square

2. Classification des isométries affines

En utilisant le fait que $f \in \mathcal{S}(E) \iff \vec{f} \in O(E)$, on va établir la classification des isométries affines à partir de la classification des isométries vectorielles. À chaque fois, il conviendra néanmoins de distinguer les cas où l'application affine possède ou non des points fixes.

- Si $\vec{f} = Id$, alors \vec{f} est une **translation**.
- Si \vec{f} est une réflexion de plan \vec{P} (un plan vectoriel dans \vec{E}).
 - Soit f admet un point fixe A . Dans ce cas, tous les points du plan affine $A + \vec{P}$ sont des points fixes de f et f est alors la réflexion affine par rapport au plan $A + \vec{P}$.
 - Soit f n'admet pas de point fixe. En utilisant le lemme C.2, on voit que f se décompose en $f = t_{\vec{v}} \circ g$ avec \vec{v} un vecteur formé à partir de points fixes de g . Comme $\vec{f} = \vec{g}$, g est une réflexion. Si on note P le plan de la réflexion g , on a $\vec{v} \in \vec{P}$. On dit que f est une **symétrie glissée orthogonale**.
- Si \vec{f} est une rotation vectorielle d'axe \vec{D} .
 - Soit f admet un point fixe A . Dans ce cas, tous les points de la droite affine $A + \vec{D}$ sont des points fixes de f . On dit que f est une rotation d'axe $A + \vec{D}$.
 - Soit f n'admet pas de point fixe. En utilisant là encore le lemme C.2, on voit que f est la composée d'une translation de vecteur \vec{v} et d'une rotation d'axe D où l'on a $\vec{v} \in \vec{D}$. On dit que f est un déplacement hélicoïdal, ou plus simplement un **vissage**.
- Si \vec{f} est une anti-rotation vectorielle d'axe \vec{D} , alors f admet un unique point fixe car 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} . On peut donc identifier f et sa partie linéaire \vec{f} . On dit que f est une **anti-rotation** d'axe $A + \vec{D}$

Chapitre D

Courbes paramétrées en polaire

I. Coordonnées polaires

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé direct du plan. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\vec{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $\vec{v}_\theta = \frac{d}{d\theta} \vec{u}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$.

Définition D.1

Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle coordonnées polaires tout couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\theta.$$

c'est-à-dire tel que $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$

Remarque. ρ peut être négatif. On a seulement $|\rho| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
De plus, il y a une infinité de couples possibles

Exemple. Coordonnées polaires de l'origine $O(0, 0)$.
Coordonnées polaires de $M(1, 1)$.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux courbes du plan paramétrées en coordonnées polaires. On se donne donc $M(t)$ via ses coordonnées polaires $(\rho(t), \theta(t))$. tout ce qui a été dit sur les courbes paramétrées en cartésiennes reste valable. On fait néanmoins les calculs dans la base (\vec{u}, \vec{v}) .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M(t) &= \rho'(t) \vec{u}_{\theta(t)} + \rho(t) \frac{d}{dt} \vec{u}_{\theta(t)} = \rho' \vec{u}_\theta + \rho \theta' \vec{v}_\theta \\ \frac{d^2}{dt^2} &= (\rho'' - \rho \theta'^2) \vec{u}_\theta + (\rho \theta'' - 2\rho' \theta') \vec{v}_\theta. \end{aligned}$$

Les courbes paramétrées en coordonnées polaires sont en toute généralité de la forme

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \quad y(t) = \rho(t) \sin \theta(t).$$

Nous nous contenterons d'étudier les courbes données sous la forme $\rho = f(\theta)$.

II. Tracé rapide

Pour tracer qualitativement une courbe en polaires, il suffit d'avoir le signe de la fonction ρ .

Exercice 13. Tracer une courbe dont le tableau est :

θ	$-\pi$	0	π
$\rho(\theta)$	$+\infty$	$+$	0
		$-$	$-\infty$

Exercice 14. Tracer une courbe dont le tableau est :

θ	$-\pi$	0	π
$\rho(\theta)$	1	$+$	0
		$+$	1

III. Exemples classiques

1. Droites

- Si D est une droite passant par l'origine, son équation est $\theta = \theta_0[\pi]$ où $\theta_0 = ((Ox), D)$.
- Si D est une droite ne passant pas par l'origine, soit $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de D. Posons $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$. En reportant dans l'équation de D, on obtient la paramétrisation polaire suivante :

$$\rho(\theta) = \frac{-c}{a \cos \theta + b \sin \theta}.$$

Si D admet pour équation normale $(\cos \phi)x + (\sin \phi)y = p$, on a alors plus simplement :

$$\rho(\theta) = \frac{p}{\cos(\theta - \phi)}.$$

Exercice 15. Quelle est la courbe $\rho(\theta) = \frac{1}{2 \cos \theta + \sin \theta}$?

2. Cercles

On ne traite que deux cas :

- Si le cercle \mathcal{C} est de centre O, son équation est $\rho = R$ où R est le rayon de \mathcal{C} .
- Si le cercle \mathcal{C} passe par O, en se privant de l'origine et en notant (x_0, y_0) le centre du cercle, l'équation cartésienne de \mathcal{C} est $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x_0^2 + y_0^2$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 2xx_0 + 2yy_0$. En posant $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$ et en divisant par ρ , on obtient :

$$\rho = 2(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta)$$

Si on note $x = R \cos \phi$ et $y = R \sin \phi$, on a :

$$\rho = 2R \cos(\theta - \phi).$$

Remarque. Attention, ayant divisé par ρ , on se prive de l'origine dans la paramétrisation qui pourtant appartient au cercle.

Exercice 16. Quelle est la courbe $\rho(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$?

IV. Réduction du domaine d'étude

On note $M[r : \theta]$ un point de coordonnées cartésiennes (r, θ) . On rappelle l'effet de quelques transformations géométriques f sur le point M :

- Réflexion d'axe (Ox) : $f(M) = (r, -\theta)$
- Réflexion d'axe (Oy) : $f(M) = (r, \pi - \theta)$
- Symétrie centrale de centre O : $f(M) = (r, \theta + \pi)$
- Réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice) : $f(M) = (r, \frac{\pi}{2} - \theta)$
- Réflexion d'axe la droite d'équation $y = -x$ (deuxième bissectrice) : $f(M) = (r, -\frac{\pi}{2} - \theta)$
- Rotation d'angle ϕ et de centre O : $f(M) = [r, \theta + \phi]$

Exemple. Donner un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe $\rho = 1 + 2\cos^2\theta$.

Solution :

$$\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta) \text{ et } \rho(-\theta) = \rho(\theta).$$

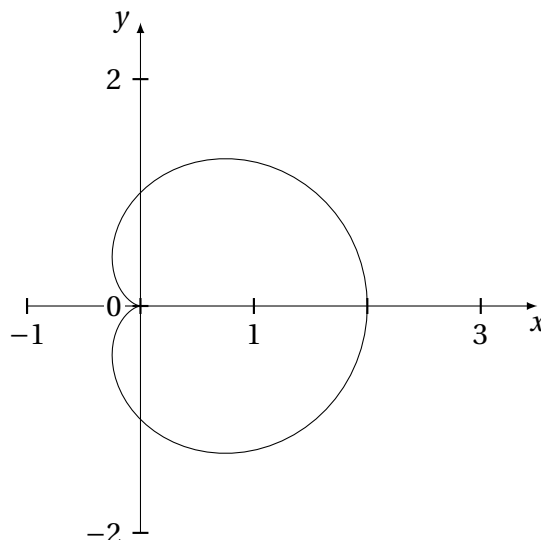
Par conséquent, on étudie la courbe pour $\theta \in [0; \pi]$ et on en déduit la courbe pour $\theta \in [-\pi; 0]$ par symétrie par rapport à l'axe (Ox) .

V. Étude rapide

Exemple. Tracer le tableau de signes de $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ et en déduire un premier tracé.

Solution :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\rho(\theta)$	2	+	1	+	0



VI. Points multiples

Si (ρ, θ) est un couple de coordonnées polaires, les autres sont $((-1)^k \rho, \theta + k\pi)$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Ceci ne vaut que pour $\rho \neq 0$.

Chercher les points multiples, c'est donc chercher les $\theta \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\rho(\theta + k\pi) = (-1)^k \rho(\theta).$$

Ensuite, on regarde le pôle en cherchant les θ tels que $\rho(\theta) = 0$.

L'étude des points multiples ne se fait que s'il semble y en avoir.

VII. Tangentes et allures locales

1. Allure locale au pôle

On suppose que la courbe passe par l'origine : il existe θ_0 tel que $\rho(\theta_0) = 0$.

On a alors $\overrightarrow{OM}(\theta) \rightarrow \theta \rightarrow \theta_0 \overrightarrow{OM}(\theta_0)$. Comme \vec{u}_θ est un vecteur directeur de $(OM(\theta))$ et que \vec{u}_{θ_0} est un vecteur directeur de $(OM(\theta_0))$, on en déduit que la tangente au pôle est la droite passant par O et d'angle θ_0 . Il y a deux possibilités :

ρ s'annule en changeant de signe	ρ s'annule sans changer de signe
allure banale	rebroussement de première espèce

Exercice 17. Étude au pôle de la cardioïde d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + \cos \theta$.

2. Allure locale en dehors du pôle

On a vu que $\frac{d}{dt}M(t) = \rho' \vec{u}_\theta + \rho \theta' \vec{v}_\theta$ donc si $\rho \neq 0$, $\frac{d}{dt}M(t) \neq 0$.

Par conséquent, **tout point en dehors du pôle est régulier.**

De plus, si on note l'angle $V = \left(\vec{u}, \frac{d}{dt}M(t) \right)$, on a :

$$\cotan(V) = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Exercice 18. Déterminer les tangentes de la cardioïde en $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

VIII. Branches infinies

On dit qu'il y a une branche infinie si θ ou ρ tend vers $\pm\infty$.

- Si $\rho \rightarrow +\infty$ (pour $\theta \rightarrow \pm\infty$), la courbe spirale.
- Si $\rho \rightarrow +\infty$ (pour $\theta \rightarrow \pm\infty$), le cercle de centre O et de rayon a est asymptote.

- Si $\rho \rightarrow \pm\infty$ (pour $\theta \rightarrow \theta_0$), il y a une branche parabolique dans la direction de l'angle θ_0 . Il faut changer de repère et travailler dans $(O, \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$. En notant $X(\theta)$ et $Y(\theta)$ les coordonnées dans ce nouveau repère, on a $X(\theta) = \rho \cos(\theta - \theta_0)$ et $Y(\theta) = \rho \sin(\theta - \theta_0)$.

Par conséquent, $\frac{Y(\theta)}{X(\theta)} = \tan(\theta - \theta_0) \xrightarrow{\theta \rightarrow \theta_0} 0$ et il y a effectivement une branche parabolique dans la direction θ_0 .

On étudie ensuite $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} Y(\theta)$ pour voir s'il y a une asymptote.

IX. Plan d'étude

Méthode – Étude d'une courbe paramétrée en polaire

1. Ensemble de définition et réduction du domaine d'étude
2. Étude de ρ (étude du signe et de quelques valeurs)
3. Étude des passages au pôle
4. Tangente en quelques points
5. Étude des branches infinies (si nécessaire)
6. Étude des points multiples (si nécessaire et si possible)

Exemple. Étudier la courbe définie en polaire par $\rho(\theta) = \frac{1 + 2 \sin(\theta)}{1 + 2 \cos(\theta)}$.

Solution :

1. Domaine d'étude :
 ρ est définie pour $\theta \neq \frac{2\pi}{3} \text{ mod}(2\pi)$ et $\theta \neq \frac{4\pi}{3} \text{ mod}(2\pi)$.
 De plus, $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$ donc on étudie la courbe pour $\theta \in [0; 2\pi] \setminus \{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\}$.
2. Étude de ρ :

θ	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$1 + 2 \sin \theta$	+	+	0	-	-	0	+
$1 + 2 \cos \theta$	+	0	-	-	0	+	+
$\rho(\theta)$	+	-	0	+	-	0	+

Calcul de quelques valeurs : $\rho(0) = \frac{1}{3}$, $\rho(\frac{\pi}{2}) = 3$, $\rho(\pi) = -1$, $\rho(\frac{3\pi}{2}) = -1$.

3. Passages au pôle :
 Il y a deux passages aux pôles : pour $\theta = \frac{7\pi}{6}$ et $\theta = \frac{11\pi}{6}$. Comme ρ s'annule en changeant de signe, il y a une allure banale en ces deux points.

4. Tangente pour $\theta = 0$.

$$\begin{aligned}\rho'(\theta) &= \frac{2\cos\theta(1+2\cos\theta) + 2\sin\theta(1+2\sin\theta)}{(1+2\cos\theta)^2} \\ &= \frac{2(2+\cos\theta+\sin\theta)}{(1+2\cos\theta)^2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\rho'(0) = \frac{2}{3}$ donc $\cotan(V) = \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} = 2$, soit $\tan(V) = \frac{1}{2}$.

5. Branches infinies :

Il y a une branche parabolique dans la direction des angles $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta_0 = \frac{4\pi}{3}$ car $\rho \rightarrow \pm\infty$.

Après changement, de repère on a :

$$Y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0).$$

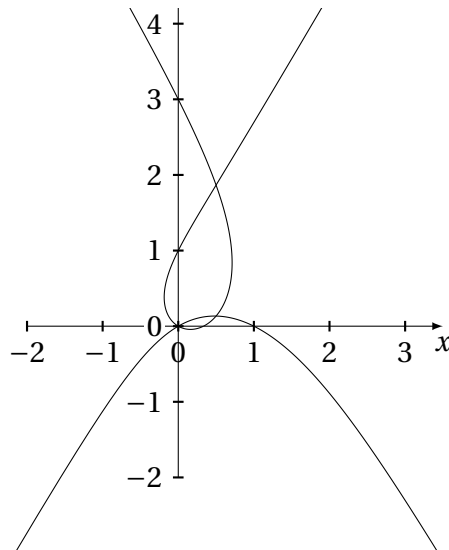
On a un équivalent de la forme suivante :

$$Y(\theta) \sim \frac{c}{\theta - \theta_0}.$$

$Y(\theta)$ ne converge pas donc la courbe n'admet pas d'asymptote.

6. Points multiples :

Déjà, l'origine est un point multiple. Pour déterminer les autres points multiples, on résout $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$ (avec $\theta \in [0; \pi]$). On montre que les solutions sont $\theta = \frac{\pi}{12}$ et $\theta = \frac{5\pi}{12}$.



Chapitre E

Coniques

I. Généralités

1. Définition

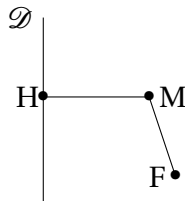
Définition E.1

Soit \mathcal{D} une droite du plan et F un point qui n'est pas sur \mathcal{D} . Soit e un réel strictement positif.

On appelle conique de directrice \mathcal{D} , de foyer F et d'excentricité e l'ensemble des points M tels que

$$MF = e \times d(M, \mathcal{D}).$$

Si on note H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} , l'équation est $MF = eMH$.



Définition E.2

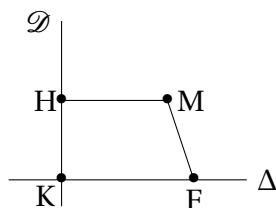
- Si $0 < e < 1$, l'ensemble des points considérés est une ellipse.
- Si $e = 1$, on parle de parabole.
- Si $e > 1$, on parle d'hyperbole.

Définition E.3

La droite Δ orthogonale à \mathcal{D} et passant par F est appelée l'axe focal.

Le projeté orthogonal de F sur \mathcal{D} est noté K.

$p = eFK$ est appelé paramètre de la conique.



2. Sommets d'une conique

On note \mathcal{C} une conique et on cherche son intersection avec l'axe focal.

$$M \in \mathcal{C} \cap \Delta \iff \overrightarrow{MF} = e\overrightarrow{MK} \text{ ou } \overrightarrow{MF} = -e\overrightarrow{MK}.$$

- Si $e = 1$, alors $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK}$ est impossible (car alors $F = K$). Le seul point d'intersection est donc M tel que $\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MK}$ (M milieu de $[FK]$).
- Si $e \neq 1$, on trouve deux possibilités : S_1 barycentre de $(F, 1)$ et (K, e) et S_2 barycentre de $(F, 1)$ et $(K, -e)$

Définition E.4

- Si $e = 1$, S milieu de $[FK]$ est appelé sommet de la parabole.
- Si $e \neq 1$, S_1 et S_2 sont appelés sommets de la conique (ellipse ou hyperbole).

3. Axe de symétrie

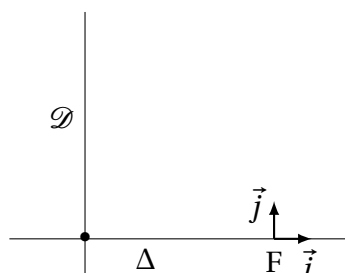
Proposition E.1

Toute conique admet son axe focal Δ comme axe de symétrie.

Démonstration. Notons M' et H' les images de M et H par la réflexion d'axe l'axe focal. Alors $MF = M'F$ et $MH = M'H'$. Donc $MF = eMH$ ssi $M'F = eM'H'$. Ainsi, M est sur la conique ssi M' aussi donc toute conique admet son axe focal comme axe de symétrie. \square

4. Équation polaire

On choisit \vec{i} sur Δ et \vec{j} sur \mathcal{D} tels que (F, \vec{i}, \vec{j}) soit un repère orthonormé direct du plan. Le foyer n'étant pas un point de la conique, on peut chercher les points de la conique en coordonnées polaires.



Proposition E.2

Soit $M(\rho, \theta)$ (coordonnées polaires).

$$M \in \mathcal{C} \iff \rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

Démonstration. $M \in \mathcal{C}$ ssi $MF = eMH$ ssi

$$\rho = e(HI + IM) = e(FK + \rho \cos \theta) = p + e\rho \cos \theta$$

d'où le résultat. □

Remarque. Attention, l'origine du repère est bien F. De plus, on trouve parfois la paramétrisation $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ (dans ce cas, il faut prendre \vec{i} orienté dans le sens contraire).

Remarque. La parité de ρ permet de retrouver que l'axe focal est un axe de symétrie.

Si $e < 1$, il n'y a aucune condition sur θ qui peut alors décrire \mathbb{R} .

Si $e = 1$, θ doit varier dans $]0, 2\pi[$.

Si $e > 1$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pm \arccos(\frac{1}{e})\}$.

Pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, on trouve $\rho = p$.

II. Paraboles

1. Équation réduite

Avec les notations précédentes, considérons le repère (S, \vec{i}, \vec{j}) .

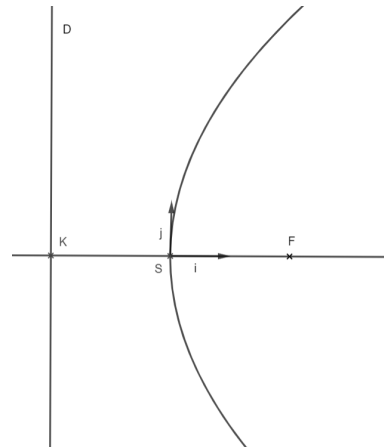
Alors $p = eFK = FK$ donc $F(\frac{p}{2}, 0)$ et $\mathcal{D} : (x = -\frac{p}{2})$.

Si $M = (x, y)$, alors $H = (-\frac{p}{2}, y)$.

De plus, $MH^2 = (x + \frac{p}{2})^2$ et $MF^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2$.

On obtient :

$$MF = MH \iff y^2 = 2px \quad \text{(équation réduite)}$$



2. Équation paramétrée

Dans le repère (S, \vec{i}, \vec{j}) , on a le paramétrage :

$$x(t) = \frac{t^2}{2p} \quad y(t) = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. Tangentes

Proposition E.3

La tangente à la parabole en un point M est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MF})$.

La normale à la parabole en un point M est donc la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{M\infty})$

Démonstration. Laissez en exercice. □

Proposition E.4

Si l'équation de la parabole est $y^2 = 2px$, alors la tangente à la parabole au point $M(x_0, y_0)$ a pour équation $y_0 y = p(x + x_0)$.

Démonstration. Laissez en exercice. □

III. Ellipses

1. Équation réduite

Avec les notations précédentes, considérons le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) où O est le milieu de $[S_1 S_2]$.

Définition E.5

Le milieu O de $[S_1 S_2]$ est appelé le centre de l'ellipse.

S_1 est le barycentre de $(F, 1)$ et (K, e) et S_2 est le barycentre de $(F, 1)$ et $(K, -e)$.

Donc $(1+e)\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK}$ et $(1-e)\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK}$.

Sachant que $\overrightarrow{OS_1} = -\overrightarrow{OS_2}$, on obtient :

$$\overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OS_1} \quad \text{et} \quad e\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OS_1}.$$

On pose $OS_1 = a$ et $OF = c$. Alors $e = \frac{c}{a}$ et $OK = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$.

alors $\mathcal{D} : (x = -\frac{a^2}{c})$ et $F(-c, 0)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{C} &\iff (x+c)^2 + y^2 = e^2 \left(x + \frac{a}{c}\right)^2 \\ &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \end{aligned}$$

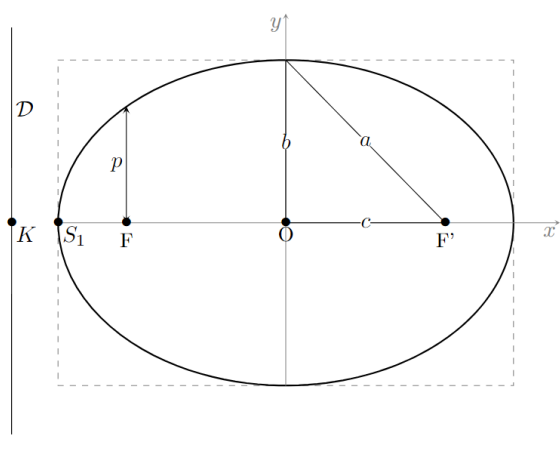
Comme $e < 1$, $a^2 - c^2 > 0$ et on pose $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

On obtient l'équation réduite d'une ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On a $p = eFK = e(OK - OF) = e\left(\frac{a}{e} - c\right) = a - ec = a - e^2 a = a(1 - e^2)$.

De plus, $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$p = a(1 - e^2)$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

Remarque. L'excentricité mesure le rapport $\frac{b}{a}$: si e est proche de 0, a est proche de b et l'ellipse est presque un cercle. Si e est proche de 1, l'ellipse est très aplatie. Attention toutefois, un cercle n'est pas une conique au sens de la définition géométrique donnée dans ce chapitre.

Remarque. $OF = c$, $OS_1 = \frac{c}{e}$ et $OK = \frac{c}{e^2}$ de sorte que ces distances forment une progression géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

Définition E.6

On note F' et \mathcal{D}' les symétriques de F et \mathcal{D} par rapport à O . F' est appelé le second foyer de l'ellipse. \mathcal{D}' est appelée seconde directrice de l'ellipse.

Proposition E.5

L'ellipse de foyer F et de directrice \mathcal{D} est également l'ellipse de foyer F' et de directrice \mathcal{D}' .

Démonstration. Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'ellipse a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Par conséquent, l'ellipse est symétrique par rapport à (O, \vec{j}) . On en déduit que l'ellipse est l'ensemble de points qui vérifient $MF' = ed(M, \mathcal{D}')$. \square

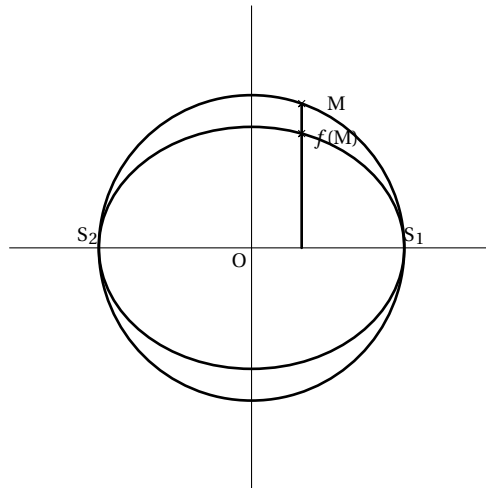
Définition E.7

La droite (FF') est appelé grand axe et la droite (O, \vec{j}) est appelée petit axe (ce sont deux axes de symétries de l'ellipse).

2. Équation paramétrée

Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) :

On considère le cercle C de centre O et de rayon a : son équation est $x^2 + y^2 = a^2$.
On considère de plus l'application affine définie par $f(x, y) = (x, \frac{b}{a}y)$.



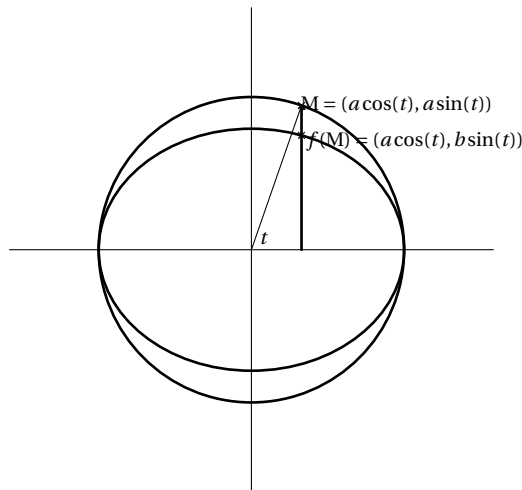
L'image par f de C est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Proposition E.6

Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a le paramétrage :

$$x(t) = a \cos(t) \quad y(t) = b \sin(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Démonstration. On utilise le fait qu'une paramétrisation du cercle de centre O et de rayon a est $x(t) = a \cos(t)$ et $y(t) = a \sin(t)$. \square



Remarque. t représente l'angle sur le cercle précédent et pas l'angle sur l'ellipse!

3. Définition bifocale

Proposition E.7

Avec les notations précédentes, l'ellipse est l'ensemble des points M tels que

$$MF + MF' = 2a.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} MF = eMH &\iff MF = eMH \quad \text{et} \quad MF' = eMH' \\ &\iff MF + MF' = e(MH + MH') \\ &\iff MF + MF' = eKK' = 2eOK = 2a \end{aligned}$$

□

4. Tangentes

Lemme E.8

Si \vec{u} est un vecteur qui dépend de t , alors $\frac{d\|\vec{u}\|}{dt} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$.

Démonstration. On part de la relation

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

et l'on différencie :

$$2\|\vec{u}\| \frac{d\|\vec{u}\|}{dt} = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

et donc

$$\frac{d\|\vec{u}\|}{dt} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

□

Proposition E.9

La tangente à l'ellipse en un point M est la bissectrice extérieure de l'angle (\vec{MF}', \vec{MF}) .

La normale à l'ellipse en un point M est donc la bissectrice intérieure de l'angle (\vec{MF}', \vec{MF}) .

Démonstration. Laissez en exercice

□

Proposition E.10

Si l'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, alors la tangente à l'ellipse au point $M(x_0, y_0)$ a pour équation $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

Démonstration. Laissez en exercice.

□

IV. Hyperboles

1. Équation réduite

Avec les notations précédentes, considérons le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) où O est le milieu de $[S_1S_2]$.

Définition E.8

Le milieu O de $[S_1S_2]$ est appelé le centre de l'hyperbole.

Comme précédemment, on obtient l'équation :

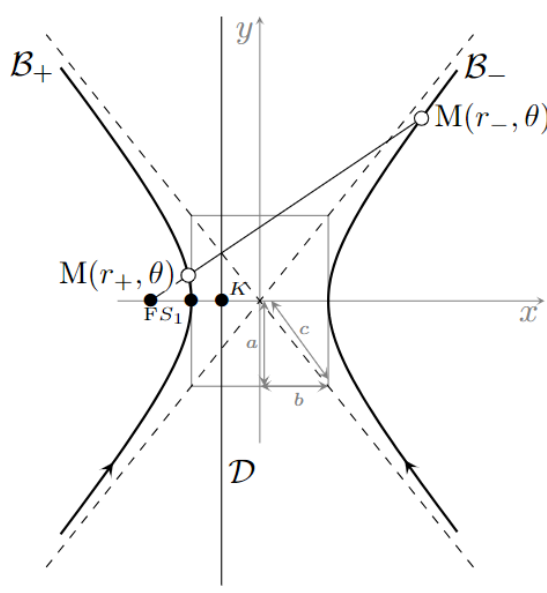
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Comme $e > 1$, $a^2 - c^2 < 0$ et on pose $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

On obtient donc l'équation réduite de l'hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On a $p = a(e^2 - 1)$ et $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$.



$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ e &= \frac{c}{a} \\ p &= a(e^2 - 1) \\ \frac{b}{a} &= \sqrt{e^2 - 1} \end{aligned}$$

Remarque. $OF = c$, $OS_1 = \frac{c}{e}$ et $OK = \frac{c}{e^2}$ de sorte que ces distances forment une progression géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

Définition E.9

On note également F' et \mathcal{D}' les symétriques de F et \mathcal{D} par rapport à O . F' est appelé le second foyer de l'hyperbole. \mathcal{D}' est appelée seconde directrice de l'hyperbole.

Proposition E.11

L'hyperbole de foyer F et de directrice \mathcal{D} est également l'ellipse de foyer F' et de directrice \mathcal{D}' .

Proposition E.12

Les droites (FF') et (O, \vec{j}) sont des axes de symétrie de l'hyperbole.

Proposition E.13

L'hyperbole a deux asymptotes : $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

Démonstration. $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{b}{a}x + o(1)$ □

Définition E.10

On dit que l'hyperbole est équilatère si $a = b$. Cela signifie que les asymptotes sont orthogonales.

2. Équation paramétrée**Proposition E.14**

Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a le paramétrage en deux « morceaux » :

$$x(t) = \pm a \operatorname{ch}(t) \quad y(t) = b \operatorname{sh}(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. Définition bifocale**Proposition E.15**

Avec les notations précédentes, l'hyperbole est l'ensemble des points M tels que

$$|\operatorname{MF} - \operatorname{MF}'| = 2a.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \operatorname{MF} = e \operatorname{MH} &\iff \operatorname{MF} = e \operatorname{MH} \quad \text{et} \quad \operatorname{MF}' = e \operatorname{MH}' \\ &\iff |\operatorname{MF} - \operatorname{MF}'| = e |\operatorname{MH} - \operatorname{MH}'| \\ &\iff |\operatorname{MF} - \operatorname{MF}'| = 2e \operatorname{OK} = 2a \end{aligned}$$

□

4. Tangentes**Proposition E.16**

La tangente à l'hyperbole en un point M est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{\operatorname{MF}'}, \overrightarrow{\operatorname{MF}})$.

La normale à l'hyperbole en un point M est donc la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{\operatorname{MF}'}, \overrightarrow{\operatorname{MF}})$.

Démonstration. Laissez en exercice. □

Proposition E.17

Si l'équation de l'hyperbole est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, alors la tangente à l'hyperbole au point $M(x_0, y_0)$ a pour équation $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Démonstration. Laissée en exercice. □

V. Réduction de l'équation d'une conique

De manière générale, l'équation d'une conique dans un repère quelconque sera de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f \quad (\text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)).$$

On peut transformer une telle équation pour la mettre sous une forme plus agréable en changeant de repère.

1. Équation sans terme xy

On considère ici que $b = 0$.

- Si $a \neq 0$ et $c \neq 0$: on peut faire disparaître les termes en dx (en posant par exemple $X = x + \frac{d}{2a}$) et le terme en ey (en posant $Y = y + \frac{e}{2a}$). On obtient donc, après translation, une équation de la forme

$$a'X^2 + b'Y^2 = c'.$$

Il suffit alors de discuter des signes de a' , b' et c' pour savoir si l'on obtient une ellipse, une hyperbole, un point, deux droites, le vide.

- Si $a \neq 0$ et $c = 0$: on obtient après translation une équation de la forme

$$a'X^2 + b'y = c'.$$

On obtient alors (selon que $b = 0$ ou $b \neq 0$) une parabole, un point, deux droites, le vide.

- Si $a = 0$ et $c \neq 0$: idem.

Exercice 19. Réduire la conique d'équation $x^2 + 2y^2 + x - y = 1$.

2. Équation sans x^2 et y^2

On considère une équation de la forme $xy + ax + by = c$.

En posant $X = x + a$ et $y = y + b$, on obtient une équation de la forme

$$XY = d'$$

. Ainsi, on peut translater le repère pour obtenir l'équation d'une hyperbole.

Exercice 20. Réduire la conique d'équation $2xy + x + y = 1$.

3. Équation générale

On se donne l'équation

$$(E): \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f.$$

Soit (\vec{i}, \vec{j}) la base canonique et (\vec{u}, \vec{v}) la base qui s'en déduit par rotation d'un angle θ . On note (x, y) les coordonnées dans la première base et (X, Y) celles dans la deuxième base.

On peut alors mettre l'équation sous la forme

$$(E): \quad AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY = F.$$

Il suffit alors de bien choisir θ afin que $B = 0$.

- Si $a = c$, on prend $\theta = \frac{\pi}{4}$.
- Si $a \neq c$, on prend θ tel que $\tan(2\theta) = \frac{b}{a-c}$.

L'équation devient alors

$$AX^2 + CY^2 + DX + EY = F.$$

(les valeurs de A, C, D, E et F ont changé)

Discutons alors suivant le signe de A et C :

- Si $A = 0$ ou $C = 0$: parabole
- Si $AC > 0$: ellipse
- Si $AC < 0$: hyperbole

On peut de plus montrer que, quelle que soit la valeur de θ ,

$$AC - \frac{1}{4}B^2 = ac - \frac{1}{4}b^2.$$

Définition E.11

Soit \mathcal{C} la conique d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$. On appelle discriminant de la conique le réel

$$ac - \frac{1}{4}b^2 = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix}.$$

Le discriminant d'une conique est invariant par changement de repère orthonormé direct.

Remarque. Comme on prend θ tel que $B = 0$, on a $\Delta = AC$. Ainsi, Δ détermine la nature de la conique.

- Si $\Delta = 0$: parabole
- Si $\Delta > 0$: ellipse
- Si $\Delta < 0$: hyperbole

Exercice 21. Réduire la conique d'équation $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Exercice 22. Réduire la conique d'équation $x^2 + \sqrt{3}xy + x = 2$.

Exercice 23. Réduire la conique d'équation $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 1$.