Chapitre 4 – Transformations vectorielles et affines

1 Transformations vectorielles

Exercice 1.
Soit E un plan vectoriel euclidien et soit $u \in O(E)$ ($u \neq Id$ et $u \neq -Id$) diagonalisable. Démontrer que u est une symétrie.

Exercice 2.
Soit E un plan vectoriel euclidien orienté, et soient u et v deux vecteurs unitaires de E. Déterminer les automorphismes orthogonaux qui envoient u sur v.

Exercice 3.
Soient E un plan vectoriel euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion de E.

1. Déterminer $s \circ r \circ s$.
2. Déterminer $r \circ s \circ r$.
3. À quelle condition s et r commutent ?

Exercice 4.
Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

1. Existe-t-il $u \in O_2(\mathbb{R})$ tel que $u(\vec{a}) = \vec{b}$?
2. Déterminer les automorphismes orthogonaux $u \in O_2(\mathbb{R})$ tels que $u(Vect(\vec{a})) = Vect(\vec{b})$.
3. Déterminer les automorphismes orthogonaux $u \in O_2(\mathbb{R})$ tels que $u(\vec{a}) = \vec{a}$.

2 Transformations affines

Exercice 5.
Montrer que si h est une homothétie affine alors l'image d'une droite (AB) est parallèle à (AB).

Exercice 6.

1. Quelle est la composée de deux réflexions affines ?
2. Quelle est la composée de deux rotations affines ?
3. Quelle est la composée d'une rotation et d'une réflexion affines ?

Exercice 7.

1. Comment s'écrivent les transformations affines du plan en nombres complexes ?
2. Montrer que toute isométrie du plan est de la forme $f(z) = az + b$ ou $f(z) = a\overline{z} + b$ avec $|a| = 1$.
3. À partir de l'écriture complexe, comment peut-on caractériser les translations ? les rotations ? les réflexions ? les glissements ?

Exercice 8.
Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$.. Écrire l'expression en complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ.

Exercice 9.
Déterminer l'expression analytique (matricielle et en complexe) des transformations suivantes :

1. la rotation de centre $\Omega(1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$
2. la réflexion d'axe $D : x + 2y = 1$
3. la symétrie glissée d'axe $D : y = 3x - 1$ et de direction $\vec{u}\begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}$

Exercice 10.
Identifier les transformations affines suivantes :

1. $f : (x, y) \longmapsto (-y + 1, x + 2)$
2. $f : (x, y) \longmapsto (y + 1, x)$
3. $f : z \longmapsto (-2 + 2i)z + (5 + i)$
4. $f : z \longmapsto z + 1 - 3i$
5. $f : z \longmapsto (1 + \sqrt{3}i)z - i$
6. $f : z \longmapsto -2i\overline{z} + 3$

Exercice 11.
Soit ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité G. I est le milieu de [AB]. Pour chacune des similitudes directes suivantes préciser son rapport et son angle.

1. s_1 qui a pour centre B et telle que $s_1(B) = C$.
2. s_2 qui a pour centre B et telle que $s_2(I) = C$.
3. s_3 qui a pour centre I et telle que $s_3(A) = C$.
4. s_4 qui a pour centre A et telle que $s_4(G) = C$.

Exercice 12.
Montrer que toute similitude qui fixe deux points distincts A et B est soit l'identité, soit la réflexion d'axe (AB).

Exercice 13. Vrai ou faux ?

1. Il est impossible qu'une homothétie de rapport $k \neq 1$ soit une rotation.

2. Il existe une unique homothétie transformant le cercle $\mathcal{C}_1$ d'équation $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ en le cercle $\mathcal{C}_2$ d'équation $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.
3. La composée de deux rotations affines est une rotation.

Exercice 14.
Soient r_1 la rotation affine de centre Ω_1 qui transforme A_1 en B_1 et r_2 la rotation affine de centre Ω_2 qui transforme A_2 en B_2. On suppose que $r_2 \circ r_1$ est une rotation. Comment peut-on construire, à la règle et au compas, le centre de la rotation $r_2 \circ r_1$?

Exercice 15.
Quelles sont les isométries qui laissent globalement invariant un cercle donné ?

Exercice 16.
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O' sécants en A et B. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme O en O'. Soit M un point sur le cercle $\mathcal{C}$ et $\mathcal{M}'$ son image par S alors les points M, B et $\mathcal{M}'$ sont alignés.

Exercice 17.
Montrer que Montrer que le triangle de sommets $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ est équilatéral si, et seulement si,

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$$

Exercice 18. Théorème de Napoléon On construit un triangle ABC, quelconque, puis extérieurement, trois triangles équilatéraux ABM, BCN et ACP. Montrer que si G_1, G_2 et G_3 désignent les centres de gravité respectifs des trois triangles, alors $G_1G_2G_3$ est un triangle équilatéral.

Exercice 19. Démonstration du théorème de Thalès par les projections
Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes du plan affine. Pour $A \in D_1$, l'application p_{A,D_1,D_2} qui fixe A et dont l'application linéaire associée est la projection vectorielle $\vec{p}$ sur $\vec{D_1}$ parallèlement à $\vec{D_2}$ est appelée projection affine sur $\vec{D_1}$ parallèlement à $\vec{D_2}$. On a : $p_{A,D_1,D_2} : M \longmapsto A+\vec{p}\overrightarrow{AM}$.

1. Montrer que p_{A,D_1,D_2} fixe tous les points de D_1.
2. Montrer que la définition d'une projection affine ne dépend pas du choix de A. On pourra donc noter plus simplement p_{D_1,D_2}.
3. Une projection affine est-elle une similitude affine ?
4. Déterminer $\mathrm{Im}(p_{D_1,D_2})$.
5. Démontrer le théorème de Thalès en utilisant une projection.

Exercice 20. Théorème de Ménélaüs
Soit ABC un triangle. Soient M, N, P trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) distincts des sommets A, B, C du triangle. Alors M, N et P sont alignés si, et seulement si,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1.$$

Indication : on pourra considérer la composée des homothéties h_1 et h_2 où h_1 est de centre M et qui transforme B en C et où h_2 est de centre N et qui transforme C en A.

Exercice 21. Théorème de Céva
Soit ABC un triangle. Soient A', B', C' trois points appartenant respectivement (BC), (CA) et (AB) distincts des sommets A, B, C du triangle. Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si, et seulement si,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Indication : on pourra appliquer le théorème de Thalès dans les cas où les droites sont parallèles et le théorème de Ménélaüs dans le cas où les droites sont concourantes.

Exercice 22. Théorème de Pappus affine
Soient trois points alignés A, B, C et trois autres points également alignés A', B', C'. Montrer que si (AB') est parallèle à (BA') et si (BC') est parallèle à (CB'), alors (AC') est parallèle à (CA').

Exercice 23. Théorème de Desargues Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommets communs et à côtés respectivement parallèles.

1. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.
2. Montrer de plus que, dans le cas où elles sont concourantes, si on note $R=(AB)\cap(A'B')$, $P=(AC)\cap(A'C')$ et $Q=(BC)\cap(B'C')$, alors les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 24. Théorème du papillon
Soient $[PQ]$ une corde d'un cercle $\mathcal{C}$. On note M le milieu de $[PQ]$ et on considère deux cordes $[AB]$ et $[CD]$ de $\mathcal{C}$ passant par M. Par ailleurs, on note

X et Y les intersections de AD et CB avec PQ. Montrer que M est aussi le milieu de $[XY]$.
Indication : On pourra considérer les quatre projetés orthogonaux de X et Y sur (AB) et (CD) puis identifier des couples de triangles semblables.

Exercice 25.
Soit E un plan affine. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. Montrer que f est affine si, et seulement si, f conserve les barycentres.

Exercice 26. Groupe diédral

1. Soit $n \geqslant 3$. Soient A_1, ..., A_n des points d'un cercle $\mathcal{C}$. Montrer qu'une isométrie affine laissant globalement invariant $\{A_1, \dots, A_n\}$ fixe le point O.
2. Dans toute cette question, on considère un polygône régulier $A_1 \dots A_n$ inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$.
   (a) Montrer que l'ensemble des isométries affines laissant globalement invariant $\{A_1, \dots, A_n\}$ est isomorphe à un sous-groupe $D_{A_1 \dots A_n}$ de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$. Montrer de plus que $D_{A_1 \dots A_n}$ ne dépend que de n. On notera par la suite D_n ce sous-groupe (appelé groupe diédral d'indice n).
   (b) Montrer qu'il existe une rotation vectorielle r et une réflexion vectorielle s qui engendrent D_n et telles que
   $$r^n = Id \qquad s^2 = Id \qquad \text{et} \qquad sr = r^{n-1}s$$
   (c) En déduire que $|D_n| = 2n$.
   (d) Montrer que $D_3 \simeq \mathfrak{S}_3$.
   (e) Déterminer l'ensemble des sous-groupes de D_4.
3. Soit $G \subset O(\mathbb{R}^2)$ un sous-groupe d'ordre fini. Montrer que G est un groupe cyclique ou à un groupe diédral.