Chapitre 3 – Barycentres

Exercice 1.
Soit A, B, P trois points distincts du plan tels que $P \in [AB]$. Écrire P comme barycentre de A et B avec des coefficients s'écrivant en fonction des distances PA et PB.

Exercice 2.
Constructions à la règle et au compas
Soient A, B deux points du plan. Construire les points suivants :

1. G_1 barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$
2. G_2 barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$
3. G_3 barycentre de $(A, 5)$ et $(B, 7)$
4. G_4 barycentre de $(A, -1)$ et $(B, 1)$
5. G_5 barycentre de $(A, -3)$ et $(B, 2)$
6. G_6 barycentre de $(A, -3)$ et $(B, -2)$

Exercice 3.
Constructions à la règle et au compas (bis)
Soient A, B et C trois points du plan. Construire les points suivants :

1. G_1 barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$
2. G_2 barycentre de $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 4)$
3. G_3 barycentre de $(A, -5)$, $(B, 2)$ et $(C, 2)$.

Exercice 4.
Soient A, B, C trois points du plan non alignés. Les droites (AB), (BC) et (AC) délimitent 7 zones du plan. Indiquer à quelle zone du plan appartient le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) selon les signes de α, β et γ.

Exercice 5.
Soit un triangle ABC, montrer que les trois médianes de ABC sont concourantes en le point G, isobarycentre de A, B et C. De plus, si A' est le milieu de $[BC]$, on a $AG = \dfrac{2}{3}AA'$.

Exercice 6.
Soit ABC un triangle et soit G son centre de gravité. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 7.
Soient $A(2, -5)$, $B(1, 2)$, $C(3, 4)$ et $D(-1, -1)$ dont les coordonnées cartésiennes sont données dans un repère (O, I, J). Soit G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$ et $(D, 1)$.
Déterminer les coordonnées de G dans le repère (O, I, J).

Exercice 8.
Soit $ABCD$ un quadrilatère. Construire le point G isobarycentre de A, B, C et D.

Exercice 9.
Soit ABC un triangle et soit G son centre de gravité. On note G' le symétrique de G par rapport au milieu de $[BC]$. Déterminer les coordonnées barycentriques de G par rapport à $[BC]$.

Exercice 10.
Soit $ABCD$ un carré. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|AB\|$$

Exercice 11.
Dans le triangle ABC, E est le milieu de $[AB]$ et G est le barycentre de $(A, -2)$, $(B, -2)$ et $(C, 15)$. Démontrer que G, C et E sont alignés .

Exercice 12.

1. Montrer que le centre du cercle inscrit a pour coordonnées barycentriques (a, b, c) relativement à A, B et C. .
2. Montrer que l'orthocentre a pour coordonnées barycentriques $(\tan\widehat{\mathrm{A}}, \tan\widehat{\mathrm{B}}, \tan\widehat{\mathrm{C}})$ relativement à A, B et C.
3. Montrer que le centre du cercle circonscrit a pour coordonnées barycentriques $(\sin 2\widehat{\mathrm{A}}, \sin 2\widehat{\mathrm{B}}, \sin 2\widehat{\mathrm{C}})$ relativement à A, B et C.

Exercice 13.
Soit (A, B, C) un repère du plan. Soit (CD) une droite du plan. Soit M dont les coordonnées barycentriques par rapport à A, B et C sont $[x, y, z]$.

1. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$M \in (CD) \iff ax + by + cz = 0$$

(On dit que $ax+by+cz = 0$ est une équation barycentrique de (CD))

2. Déterminer une équation barycentrique de la droite (AB) où les coordonnées cartésiennes de A et B sont $A(1,5)$ et $B(3,9)$.

Exercice 14.
Montrer que trois droites du plan dont les équations barycentriques sont $ax+by+cz=0$, $a'x+b'y+c'z=0$ et $a''x+b''y+c''z=0$, sont concourantes ou parallèles si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 15.
On considère $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ ses racines et, pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, A_i désigne le point d'affixe a_i. Montrer que toutes les racines du polynôme P' sont contenues dans l'enveloppe convexe des $(\mathrm{A}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
Indication : on pourra commencer par décomposer la fraction $\dfrac{P'}{P}$ *en éléments simples.*

Exercice 16. Théorème de Ménélaüs
Soit ABC un triangle. Soient M, N, P trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) distincts des sommets A, B, C du triangle. Alors M, N et P sont alignés si, et seulement si,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = +1.$$

Exercice 17. Théorème de Céva
Soit ABC un triangle. Soient A', B', C' trois points appartenant respectivement (BC), (CA) et (AB) distincts des sommets A, B, C du triangle. Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si, et seulement si,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$