Chapitre 1 – Rappels

Exercice 1.
Déterminer la forme exponentielle de :

$$e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Exercice 2.
Montrer que pour tous réels p et q,

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Exercice 3.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $u = \tan(\frac{\theta}{2})$.
Montrer que :

— $\sin(\theta) = \dfrac{2u}{1+u^2}$

— $\cos(\theta) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

— $\tan(\theta) = \dfrac{2u}{1-u^2}$

Méthode

Pour calculer une intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ où f est définie avec des fonctions trigonométriques :

- Si la fonction est une puissance de sin et de cos, on linéarise.
- Sinon, on essaye les règles de Bioche (avec $\omega(t) = f(t)dt$) :
  — Si $\omega(-t) = \omega(t)$, on pose $u = \cos(t)$
  — Si $\omega(\pi - t) = \omega(t)$, on pose $u = \sin(t)$
  — Si $\omega(\pi + t) = \omega(t)$, on pose $u = \tan(t)$
- Dans tous les autres cas, on pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

Exercice 4.
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin^3(t)\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta.$

Exercice 5.
Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \cos^5(t)\mathrm{d}t \quad$ sur $\mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^6(t)}\mathrm{d}t \quad$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin(t)}\mathrm{d}t \quad$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6.
Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 7.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Exercice 8. Construction à la règle et au compas
Soit (O, I, J) un repère orthonormé et soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est constructible s'il est possible de construire, à la règle (non graduée) et au compas, un segment de longueur x à partir des points O, I et J.
Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ sont constructibles alors les nombres suivants sont constructibles :

$$x+y \qquad x-y \qquad xy \qquad \frac{x}{y} \text{ (si } y \neq 0) \qquad \sqrt{x} \text{ (si } x \geqslant 0)$$

Exercice 9. Construction du pentagone

1. Soit $\omega = e^{\frac{2\pi}{5}}$
   (a) Justifier que : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
   (b) On pose $\Omega = \omega + \dfrac{1}{\omega}$.
   Calculer $\omega^2 + \dfrac{1}{\omega^2}$ en fonction de Ω.
   (c) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
2. À partir du cercle trigonométrique tracé dans un repère orthonormé (O, I, J), on construit les points suivants :
   - I' le symétrique de I par rapport à O ;
   - M le milieu de $[OI']$;
   - N le point d'intersection du cercle de centre M et de rayon MJ avec l'axe des abscisses (N est le point d'intersection ayant une abscisse positive)
   - P le milieu de de $[ON]$

- A_1 le point d'intersection du cercle trigonométrique de la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par P (A_1 est le point d'intersection ayant une ordonnée positive).
- On reporte successivement la distance A_1I sur le cercle afin d'obtenir les points A_2, A_3 et A_4.

Justifier que $IA_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier.

Exercice 10.
Soit $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \longmapsto \dfrac{z+i}{z-i} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$, $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$

Exercice 11.
On considère 1000 points distincts du plan.

1. Montrer qu'il est possible de tracer une droite D de sorte qu'il y ait 500 points de part et d'autre de D.
2. Montrer qu'on peut tracer un cercle de sorte qu'il y ait exactement 500 points à l'intérieur du cercle et 500 points à l'extérieur.

Exercice 12.
Calculer le périmètre et l'aire d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Exercice 13.
Quel est le plus grand nombre de points que l'on peut placer dans le disque unité de sorte que la distance entre deux points quelconques soit strictement supérieure à 1 ?

Exercice 14.
Soit $A_1A_2\ldots A_n$ un polygone régulier (avec $n \geqslant 6$). Montrer que :

$$A_1A_4{}^2 = A_1A_2{}^2 + A_1A_3 \times A_1A_5.$$

Exercice 15.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines n^{e} de l'unité.
2. Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On note x_1, …, x_n ses racines dans $\mathbb{C}$ (pas nécessairement toutes distinctes).

   On définit les fonctions symétriques élémentaires des racines de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl}
\sigma_1 & = & \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k \\
\sigma_2 & = & \displaystyle\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} x_k x_l \\
 & \vdots & \\
\sigma_k & = & \displaystyle\sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_s\leqslant n} x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_s} \\
 & \vdots & \\
\sigma_n & = & x_1x_2\ldots x_n.
\end{array}$$

   Justifier que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\sigma_k = (-1)^k \times \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

   On n'attend pas nécessairement une preuve très rigoureuse ici.
3. Retrouver le résultat de la question 1 en utilisant le résultat de la question 2.

Exercice 16.
Sur le cercle trigonométrique, les points A et B sont repérés par $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$. Déterminez les points M du cercle tels que le triangle ABM soit isocèle.

Exercice 17. Théorème de Varignon
Soit ABCD un quadrilatère quelconque (non croisé). On note I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Que peut-on dire du quadilatère IJKL ?

Exercice 18.
Soit A, B, C, D quatre points du plan distincts. Montrer que

$$AB^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2 \quad\Longleftrightarrow\quad (AC) \perp (BD)$$

Exercice 19.
Soient $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ des points du plan. Peut-on trouver n points $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$ tels que $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ soient les milieux respectifs des segments $\left[\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\right]$, $\left[\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\right]$, …, $\left[\mathrm{B}_n\mathrm{B}_1\right]$?

Exercice 20.
Quelle est l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un carré de côté 1 ?

Exercice 21.
Soit ABC un triangle non rectangle. Montrer que

$$\tan(\widehat{A})+\tan(\widehat{B})+\tan(\widehat{C}) = \tan(\widehat{A})\times\tan(\widehat{B})\times\tan(\widehat{C})$$