Géométrie – CC 1

février 2024

Les documents, téléphones et calculatrices sont interdits. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (3 points)

1. Énoncer et démontrer la formule d'Al-Kashi.

2. Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Remarque : on pourra utiliser sans justification le fait que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Solution:
Voir cours.

Exercice II (6 points)
Soient $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,1)$ et $D(4,5)$ quatre points dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'équation normale de la médiatrice du segment $[AB]$. Faire ensuite une figure en faisant apparaître les paramètres géométriques de l'équation normale calculée.

Solution:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$ est donc de la forme $2x + 2y + c = 0$. Comme le milieu $I(2,3)$ de $[AB]$ appartient à la médiatrice, on trouve $c = -10$.
En simplifiant, une équation cartésienne de la médiatrice est donc $x + y - 5 = 0$, soit encore $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{5}{\sqrt{2}} = 0$, c'est-à-dire $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y = \frac{5}{\sqrt{2}}$

2. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Déterminer les coordonnées de H.

Solution:

Un paramétrage de (AB) est $M(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2+2t \end{pmatrix}$.
$H \in (AB)$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0$.
On résout $2(-4+2t) + 2(1+2t) = 0$. On trouve $t = \dfrac{3}{4}$. Le projeté est donc $H\left(\frac{5}{2}\,;\frac{7}{2}\right)$.

3. Déterminer des équations cartésiennes des bissectrices de (AB) et (CD).

Solution:

Des équations cartésiennes de (AB) et (CD) sont respectivement $x - y + 1 = 0$ et $4x + y - 21 = 0$.
Soit $M(x, y)$ un point du plan.
M appartient aux bissectrices de (AB) et (CD) si, et seulement si,

$$\begin{aligned}
d(M,(AB)) = d(M,CD) \quad &\iff \quad \frac{|x-y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|4x+y-21|}{\sqrt{4^2+1^2}} \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt{17}\,(x-y+1) = \sqrt{2}\,(4x+y-21) \\ ou \\ \sqrt{17}\,(x-y+1) = -\sqrt{2}\,(4x+y-21) \end{array}\right. \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{l} (\sqrt{17}-4\sqrt{2})x - (\sqrt{17}+\sqrt{2})y + \sqrt{17} + 21\sqrt{2} = 0 \\ ou \\ (\sqrt{17}+4\sqrt{2})x - (\sqrt{17}-\sqrt{2})y + \sqrt{17} - 21\sqrt{2} = 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Exercice III (3 points)

1. Calculer une primitive de $\sin^3(t)$.

Solution:

On linéarise :

$$\sin^3(t) = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3it}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-3it}}{-8i} = -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)$$

Ainsi, une primitive est :

$$F(t) = \frac{1}{12}\cos(3t) - \frac{3}{4}\cos(t)$$

2. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^4(t)}dt$$

Solution:

D'après les règles de Bioche, on pose $u = \tan(t)$. Lorsque t va de 0 à $\frac{\pi}{6}$, u va de 0 à

$\frac{\sqrt{3}}{3}$. De plus, $\frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + u^2$ et $du = (1 + u^2)dt$.
On obtient donc

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (1 + u^2)du = \left[u + \frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{27}$$

Exercice IV (8 points)

Partie 1

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O. On définit le repère orthonormé (O, A, I) dans lequel les points A, B et C ont pour affixes respectives 1, j et j^2 où j est le nombre complexe tel que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Quelle est la valeur de $1 + j + j^2$?

Solution:

$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$ car $j^3 = 1$.

2. On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. On considère alors un point $M \in \mathcal{C}$.

(a) Justifier que l'affixe de M dans le repère (O, A, I) est de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

Solution:

Le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle trigonométrique (car A, B et C sont trois points du cercle trigonométrique). Par conséquent, M est de module 1, d'où le résultat.

(b) Montrer que $AM = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$

Solution:

$$AM = |e^{i\theta} - 1| = \left|e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\right)\right| = \left|e^{i\theta/2}\right| \times \left|2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$$

(c) Montrer que $BM + CM = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right| + 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)\right|$

Solution:

On factorise de même par l'arc moitié :

$$BM + AM = \left|e^{i\theta} - e^{2i\pi/3}\right| + \left|e^{i\theta} - e^{4i\pi/3}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right| + 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)\right|$$

(d) En déduire que si $\frac{2\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{4\pi}{3}$, alors

$$AM = BM + CM.$$

Solution:

Dans le cas où $\frac{2\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{4\pi}{3}$, on voit que les angles $\frac{\theta}{2}$ et $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}$ appartiennent à $[0;\pi]$ tandis que l'angle $\frac{\theta}{2} - \frac{2\pi}{3}$ appartient à $[-\pi;0]$. Par conséquent, on connaît le signes des sinus apparaissant dans les questions (b) et (c). On peut écrire :

$$\begin{aligned} & BM + CM \\ = \; & 2\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ = \; & 2\left(\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\pi}{3})\right) - 2\left(\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{2\pi}{3}) - \cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{2\pi}{3})\right) \\ = \; & 2\sin(\frac{\theta}{2}) = AM \end{aligned}$$

3. On se place toujours dans le cas où $\frac{2\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{4\pi}{3}$. Montrer que (AM) est une bissectrice de l'angle $\widehat{BMC}$.
Indication : on pourra montrer que $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ *et que* $\widehat{CMA} = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Solution:

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc AB. D'après la propriété des angles inscrits, on a donc $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ (les points M et C sont situés sur le même arc de cercle, du même côté).
De même, on montre que $\widehat{CMA} = \widehat{CBA} = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Finalement, on a $\widehat{AMB} = \widehat{CMA}\,[2\pi]$, ce qui signifie exactement que (AM) est une bissectrice de l'angle $\widehat{BMC}$.

Partie 2

On considère un triangle quelconque ABC. On construit trois triangles équilatéraux ABI, ACJ et BCL à l'extérieur du triangle ABC. On note $\mathcal{C}_1$ le cercle circonscrit au triangle ABI, $\mathcal{C}_2$ le cercle circonscrit au triangle ACJ et $\mathcal{C}_3$ le cercle circonscrit au triangle BCL.

1. Montrer que les cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont concourants en un point F.

Solution:

Soit H le point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui est différent de A. On va montrer que $H \in \mathcal{C}_3$, c'est-à-dire que les points B, L, C et H sont cocycliques.
Or, comme $H \in \mathcal{C}_1$, on sait d'après la propriété des angles inscrits que :

$$(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \pm\frac{\pi}{3}\,[\pi]$$

De même, comme $H \in \mathcal{C}_2$,

$$(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JC}) = \pm\frac{\pi}{3}\,[\pi]$$

Par ailleurs, les signes des deux égalités précédentes sont identiques (il suffit, pour le justifier de distinguer les cas où ABC est direct ou indirect). Or, comme $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \pi$, on obtient :

$$(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = \pi \pm \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Là encore, en distinguant les cas des triangles directs et indirects, on en déduit que

$$(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{LB}, \overrightarrow{LC})\,[\pi]$$

ce qui permet de conclure que $H \in \mathcal{C}_3$ et que les trois cercles sont donc bien concourants.

2. Montrer que les droites (AL), (BJ) et (CI) sont concourantes en F.
Indication : on pourra distinguer le cas où tous les angles du triangle ABC sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$ du cas où l'un des angles, par exemple $\widehat{A}$, est strictement supérieur à $\frac{2\pi}{3}$.

Solution:

On utilise le résultat de la question 3 (partie 1). On suppose que tous les angles du triangle ABC sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. Ainsi, pour le triangle équilatéral IAB (où l'on considère que I est d'affixe 1), le point H est dans la configuration où son argument est compris entre $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. D'après la partie 1, (IH) est la bissectrice de $\widehat{AHB}$ et on a $\widehat{AHI} = \widehat{IHB} = \frac{\pi}{3}$. On montre de même que $\widehat{AHJ} = \widehat{JHC} = \frac{\pi}{3}$ et que $\widehat{CHI} = \widehat{IHB} = \frac{\pi}{3}$. Ces égalités d'angles permettent de conclure que, par exemple, les points I, H et C sont alignés.

Dans le cas où l'un des angles, par exemple $\widehat{A}$ est strictement supérieur à $\dfrac{2\pi}{3}$, le point d'intersection H sera extérieur au triangle. Cependant l'égalité d'angles restera vérifiée et les trois droites seront concourantes.