Géométrie – CC 1

février 2024

Les documents, téléphones et calculatrices sont interdits. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (3 points)

1. Énoncer et démontrer la formule d'Al-Kashi.

2. Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
   Remarque : on pourra utiliser sans justification le fait que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Exercice II (6 points)
Soient $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,1)$ et $D(4,5)$ quatre points dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'équation normale de la médiatrice du segment $[AB]$. Faire ensuite une figure en faisant apparaître les paramètres géométriques de l'équation normale calculée.

2. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Déterminer les coordonnées de H.

3. Déterminer des équations cartésiennes des bissectrices de (AB) et (CD).

Exercice III (3 points)

1. Calculer une primitive de $\sin^3(t)$.

2. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^4(t)} dt$$

Exercice IV (8 points)

Partie 1

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O. On définit le repère orthonormé (O, A, I) dans lequel les points A, B et C ont pour affixes respectives 1, j et j^2 où j est le nombre complexe tel que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Quelle est la valeur de $1 + j + j^2$?

2. On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. On considère alors un point $M \in \mathcal{C}$.

(a) Justifier que l'affixe de M dans le repère (O, A, I) est de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

(b) Montrer que $AM = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$

(c) Montrer que $BM + CM = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right| + 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)\right|$

(d) En déduire que si $\frac{2\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{4\pi}{3}$, alors

$$AM = BM + CM.$$

3. On se place toujours dans le cas où $\frac{2\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{4\pi}{3}$. Montrer que (AM) est une bissectrice de l'angle $\widehat{BMC}$.
Indication : on pourra montrer que $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ *et que* $\widehat{CMA} = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Partie 2

On considère un triangle quelconque ABC. On construit trois triangles équilatéraux ABI, ACJ et BCL à l'extérieur du triangle ABC. On note $\mathcal{C}_1$ le cercle circonscrit au triangle ABI, $\mathcal{C}_2$ le cercle circonscrit au triangle ACJ et $\mathcal{C}_3$ le cercle circonscrit au triangle BCL.

1. Montrer que les cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont concourants en un point F.

2. Montrer que les droites (AL), (BJ) et (CI) sont concourantes en F.
Indication : on pourra distinguer le cas où tous les angles du triangle ABC sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$ du cas où l'un des angles, par exemple $\widehat{A}$, est strictement supérieur à $\frac{2\pi}{3}$.