Algèbre II – Évaluation 1

octobre 2023

Les documents, téléphones et calculatrices sont interdits. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

1. Montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est de cardinal $\dfrac{n!}{2}$.

2. Décomposer la permutation $\sigma = (1478)(256)(1548) \in S_8$ en produit de cycles à supports disjoints puis en produit de transpositions.

3. Donner un exemple de forme bilinéaire (2-linéaire) non nulle sur $\mathbb{R}^3$. Aucune justification n'est attendue.

4. Existe-t-il une forme 4-linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$?

5. Existe-t-il une forme 3-linéaire alternée non nulle sur $\mathbb{R}^3$?

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\rho \in S_n$. On note
$$\Gamma_\rho = \{\sigma \in S_n \,|\, \sigma\rho\sigma^{-1} = \rho\}$$
   (a) Montrer que Γ_ρ est un groupe.
   (b) Pour $n = 3$ et $\rho = (12)$ déterminer Γ_ρ.

7. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions $f_1 : x \longmapsto e^x$ et $f_2 : x \longmapsto e^{2x}$.
   (a) Montrer que la famille (f_1, f_2) est libre.
   (b) Soit $V = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. On définit $D : f \in V \longmapsto f'$. Montrer que D est un endomorphisme de V.
   (c) Donner sa matrice dans la base (f_1, f_2) puis en déduire son déterminant.

8. Soit $2 \leqslant p \leqslant n$. Soit $c = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in S_n$ un p-cycle. Calculer c^2

9. Bonus : montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.