Algèbre II – Évaluation 1

octobre 2023

Les documents, téléphones et calculatrices sont interdits. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

1. Montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est de cardinal $\dfrac{n!}{2}$.

Solution:

Voir cours

2. Décomposer la permutation $\sigma = (1478)(256)(1548) \in S_8$ en produit de cycles à supports disjoints puis en produit de transpositions.

Solution:

$\sigma = (1625784) = (16)(62)(25)(57)(78)(84)$

3. Donner un exemple de forme bilinéaire (2-linéaire) non nulle sur $\mathbb{R}^3$. Aucune justification n'est attendue.

Solution:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & xx' + 2yy' - 5zz' \end{array} \right.$$

4. Existe-t-il une forme 4-linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$?

Solution:

Oui, exemple :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & x_1x_2y_3x_4 + 3x_1y_2z_3z_4 \end{array} \right.$$

5. Existe-t-il une forme 3-linéaire alternée non nulle sur $\mathbb{R}^3$?

Solution:

Oui, par exemple le déterminant dans une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\rho \in S_n$. On note

$$\Gamma_\rho = \{\sigma \in S_n \,|\, \sigma\rho\sigma^{-1} = \rho\}$$

(a) Montrer que Γ_ρ est un groupe.

Solution:

On montre que Γ_ρ est un sous groupe de S_n.

– L'élément neutre ($Id_{\{1,\ldots,n\}}$) appartient bien à Γ_ρ.
– Soient $\sigma_1 \in \Gamma_\rho$ et $\sigma_2 \in \Gamma_\rho$. Montrons que $\sigma_1\sigma_2 \in \Gamma_\rho$.

$$\begin{array}{rcl} (\sigma_1\sigma_2)\,\rho\,(\sigma_1\sigma_2)^{-1} & = & \sigma_1\sigma_2\rho\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} \\ & = & \sigma_1\rho\sigma_1^{-1} \ \ (\text{car } \sigma_2 \in \Gamma_\rho) \\ & = & \rho \ \ (\text{car } \sigma_1 \in \Gamma_\rho) \end{array}$$

– Soit $\sigma \in \Gamma_\rho$. Montrons que $\sigma^{-1} \in \Gamma_\rho$ En fait,

$$\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho \Longleftrightarrow \sigma^{-1}\rho\sigma = \rho$$

d'où le résultat.

Autre preuve : on pouvait aussi montrer que Γ_ρ est un groupe en utilisant la définition (un peu plus long) : Γ_ρ est muni d'une loi de composition interne :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma_\rho \times \Gamma_\rho & \longrightarrow & \Gamma_\rho \\ (\sigma_1, \sigma_2) & \longmapsto & \sigma_1 \circ \sigma_2 \end{array} \right.$$

Cette loi est bien défini car Γ_ρ est stable par produit (voir preuve précédente). De plus,
– Γ_ρ possède un élément neutre (identité).
– Associativité : soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Gamma_\rho$. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$ donc par associativité de S_n :

$$(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$$

– Symétrique : Soit $\sigma \in \Gamma_\rho$. Alors σ admet un inverse $\sigma^{-1} \in S_n$. Or par stabilité de Γ_ρ par passage à l'inverse (voir également la preuve précédente), on sait que $\sigma^{-1} \in \Gamma_\rho$.

(b) Pour $n = 3$ et $\rho = (12)$ déterminer Γ_ρ.

Solution:

En calculant, pour chaque permutation $\sigma \in S_3$ la permutation $\sigma\rho\sigma^{-1}$, on montre que

$$\Gamma_\rho = \{Id, (12)\}.$$

7. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions $f_1 : x \longmapsto e^x$ et $f_2 : x \longmapsto e^{2x}$.

   (a) Montrer que la famille (f_1, f_2) est libre.

   Solution:

   Soient $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0.$$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} = 0$$

   En évaluant l'égalité pour $x = 0$ et pour $x = 1$, on obtient le système suivant :

   $$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ e\lambda_1 + e^2\lambda_2 = 0 \end{array} \right\}$$

   En résolvant le système, on en déduit alors que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

   (b) Soit $V = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. On définit $D : f \in V \longmapsto f'$. Montrer que D est un endomorphisme de V.

   Solution:

   On vérifie que D est linéaire. Pour tout $f, g \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

   $$D(f + \lambda g) = (f + \lambda g)' = f' + \lambda g' = D(f) + \lambda D(g).$$

   Par ailleurs, $D(f_1) = f_1 \in V$ et $D(f_2) = 2f_2 \in V$.
   On en déduit donc que $D(V) \subset V$ et que D est donc un endomorphisme.

   (c) Donner sa matrice dans la base (f_1, f_2) puis en déduire son déterminant.

   Solution:

   Comme $D(f_1) = f_1$ et $D(f_2) = f_2$, on en déduit que la matrice de D dans la base (f_1, f_2) est

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Son déterminant est donc 2.

8. Soit $2 \leqslant p \leqslant n$. Soit $c = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in S_n$ un p-cycle. Calculer c^2

Solution:

Si p est pair, $c^2 = (x_1, x_3, \dots, x_{p-1})(x_2, x_4, \dots, x_p)$.
Si p est impair, $c^2 = (x_1, x_3, \dots, x_p, x_2, x_4, \dots, x_{p-1})$.

9. Bonus : montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

Solution:

Tous les 3-cycles sont dans $\mathcal{A}_n$ donc tout produit de 3-cycles est dans $\mathcal{A}_n$.
Réciproquement, on va montrer que toute permutation $\sigma \in \mathcal{A}_n$ est un produit de 3-cycles.
On sait que σ se décompose en produit d'un nombre pair de transpositions (car $\epsilon(\sigma) = 1$).
Il suffit donc de montrer que le produit de deux transpositions peut s'écrire comme un produit de 3-cycles.
On distingue deux cas : – Soit $\rho = (ij)(kl)$ avec i, j, k, l deux à deux distincts.
Alors $\rho = (kjl)(ijk)$ est bien un produit de 3-cycles. – Soit $\rho = (ij)(ik)$ avec i, j, k deux à deux distincts.
Alors $\rho = (ikj)$ est bien un 3-cycle.